# CB n°11 - SURFACES - Sujet 1

Dans tout le sujet, l'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

## EXERCICE 1

Soient $C$ la courbe admettant pour paramétrage : $t \mapsto \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = t^3 \end{cases}$, et $S$ la surface réglée engendrée par les droites $T_t$ tangentes à $C$ en $M(t)$.

**1.** Déterminer un paramétrage de $S$.

**2.** Déterminer les points singuliers de $S$ et, pour les points réguliers, donner une équation cartésienne du plan tangent à $S$.

**3.** Vérifier que tous les points réguliers d'une même génératrice $T_t$ ont le même plan tangent.

## EXERCICE 2

Soit $C$ la courbe d'équations : $\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x^2 + 2z^2 - y - 1 = 0 \end{cases}$.

**1.** Déterminer la projection de $C$ sur le plan $(yOz)$, et la représenter.

**2.** Donner une équation cartésienne du cylindre $\Sigma$ de directrice $C$ dont les génératrices sont parallèles à la droite d'équations $\begin{cases} x - 2y - 3 = 0 \\ x - y - z - 2 = 0 \end{cases}$.

**3.** Donner une équation cartésienne de la surface de révolution $S$ engendrée par la rotation de $C$ autour de la droite $(Oy)$.

## EXERCICE 3

Soit $S$ la surface d'équation : $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 1$.

**1.** Donner une équation du plan tangent tangent à $S$ en $A(1, 0, 0)$.

**2.** On pose $s = x + y + z$ et $t = x^2 + y^2 + z^2$. Montrer que l'équation de $S$ s'écrit : $3st - s^3 = 2$.

**3.** Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée directe, dont le premier vecteur est colinéaire à $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$.
A l'aide de la question précédente, donner une équation de $S$ dans le repère $(O, \mathscr{B})$.

**4.** En déduire que $S$ est une surface de révolution autour de la droite $D = (O, \overrightarrow{u})$.

# CB n°11 - SURFACES - Sujet 2

Dans tout le sujet, l'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

## EXERCICE 1

Soit $S$ la surface admettant pour paramétrage : $(u,v) \mapsto \begin{cases} x = u + v^2 \\ y = v + u^2 \\ z = uv \end{cases}$

**1.** Montrer que le point $A$ de $S$ de paramètres $(1,1)$ est un point régulier, et déterminer une équation cartésienne du plan $P$ tangent à $S$ en $A$.

**2.** Montrer que la courbe $\Gamma$ admettant pour paramétrage : $t \mapsto \begin{cases} x = 1 + t^2 \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases}$ est tracée sur $S$ et passe par $A$.

**3.** Donner un paramétrage de la tangente à $\Gamma$ en $A$, et vérifier qu'elle est dans $P$.

## EXERCICE 2

Soit $C$ la courbe d'équations : $\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x^2 - z^2 - y = 0 \end{cases}$.

**1.** Déterminer la projection de $C$ sur le plan $(xOz)$, et la représenter.

**2.** Donner une équation cartésienne du cylindre $\Sigma$ de directrice $C$ dont les génératrices sont parallèles à la droite d'équations $\begin{cases} x - 2y - 3 = 0 \\ x - y - z - 2 = 0 \end{cases}$.

**3.** Donner une équation cartésienne de la surface de révolution $S$ engendrée par la rotation de $C$ autour de la droite $(Ox)$.

## EXERCICE 3

Soit $S$ la surface d'équation : $x^3 + y^3 - xy^2 - x^2y + 2xz^2 + 2yz^2 = 1$.

**1.** Donner une équation du plan tangent tangent à $S$ en $A(1,0,0)$.

**2.** On pose $s = x + y$ et $t = x^2 + y^2 + z^2$. Montrer que l'équation de $S$ s'écrit : $2st - s^3 = 1$.

**3.** Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée directe, dont le premier vecteur est colinéaire à $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$.
A l'aide de la question précédente, donner une équation de $S$ dans le repère $(O, \mathscr{B})$.

**4.** En déduire que $S$ est une surface de révolution autour de la droite $D = (O, \vec{u})$.