CB n°12 - PROBABILITES -

Exercice 1

A, B et C lancent successivement un dé équilibré à 6 faces. A joue, puis B, puis C, puis on recommence à A et ainsi de suite jusqu'à l'obtention d'un 6. Celui qui l'obtient gagne le jeu.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note : A_n l'événement A gagne au n-ième jet, et de même B_n et C_n.

1. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(A_n), \mathbb{P}(B_n)$ et $\mathbb{P}(C_n)$.

2. En déduire la probabilité que A gagne, puis B, puis C.

3. Calculer la probabilité que le jeu ne se termine pas.

Exercice 2

Un joueur lance une pièce équilibrée jusqu'à obtention du premier pile.
S'il a fallu n lancers pour obtenir ce premier pile, on lui fait tirer au hasard une boule parmi n dont une seule est blanche. Il gagne s'il tire cette boule.

1. Quelle est la probabilité que le joueur gagne ?

2. Sachant que le joueur a gagné, quelle est la probabilité qu'il ait obtenu le premier pile au troisième lancer ?

Exercice 3

On dispose de deux urnes U_1 et U_2. L'urne U_1 contient une boule blanche et deux boules noires, l'urne U_2 contient une boule blanche et une boule noire.
Deux joueurs A et B effectuent des tirages successifs avec remise, A tire dans U_1 et B dans U_2.
A commence. Le premier qui obtient une boule blanche gagne le jeu.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note :
A_n l'événement "A gagne au n-ième tirage"
B_n l'événement "B gagne au n-ième tirage".

1. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\mathbb{P}(A_n)$ et $\mathbb{P}(B_n)$.

2. En déduire les probabilités des événements "A gagne le jeu", "B gagne le jeu", et "le jeu ne se termine pas".

Exercice 4

Deux archers A_1 et A_2 disputent un match. Ils tirent alternativement sur une cible jusqu'à ce que l'un d'eux la touche. A_1 tire en premier.
Pour $i \in \{1, 2\}$, l'archer A_i touche la cible avec la probabilité p_i. Les tirs sont indépendants.
On note G_i l'événement A_i gagne pour $i \in \{1, 2\}$.

1. Calculer la probabilité que A_i gagne au rang $2n + i$, pour $i \in \{1, 2\}, n \in \mathbb{N}$.

2. En déduire $\mathbb{P}(G_i)$ pour $i \in \{1, 2\}$, puis la probabilité que le jeu dure indéfiniment.

3. A quelle condition le jeu est-il équitable (c'est-à-dire $\mathbb{P}(G_1) = \mathbb{P}(G_2)$) ?

4. Que dire si $p_1 > \dfrac{1}{2}$?

Exercice 5

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, et Y un variable aléatoire indépendante de X, qui suit une loi de Bernoulli de paramètre p.
On définit la variable aléatoire Z par $Z = 0$ si $Y = 0$, et $Z = X$ sinon.

1. Déterminer la loi de Z, et la loi de Y conditionnée par $(Z = 0)$.

2. Z admet-elle une espérance ? Admet-elle une variance ? Si oui, la ou les calculer.

Exercice 6

On définit sur $\mathbb{N}$ l'application P donnée par : $\forall n \in \mathbb{N}, P(\{n\}) = \dfrac{1}{2^{n+1}}$.

1. Vérifier que P est une probabilité sur $\mathbb{N}$.

2. Dans $\mathbb{N}$ muni de la probabilité P, les événements $2\mathbb{N}$ et $3\mathbb{N}$ sont-ils indépendants ?

3. Calculer la probabilité des événements : $\{k \in \mathbb{N}, 2 \nmid k \text{ et } 3 \nmid k\}$ et $\{k \in \mathbb{N}, 2|k \text{ et } 3 \nmid k\}$.

4. La variable aléatoire de loi $(n, P(\{n\}))$ admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

Exercice 7

On définit sur $\mathbb{N}$ l'application P donnée par : $\forall n \in \mathbb{N}, P(\{n\}) = \dfrac{1}{en!}$.

1. Vérifier que P est une probabilité sur $\mathbb{N}$.

2. Dans $\mathbb{N}$ muni de la probabilité P, calculer la probabilité des événements : $A = \{2k, k \in \mathbb{N}\}$ et $B = \{2k + 1, k \in \mathbb{N}\}$.

3. Les événements A et B sont-ils incompatibles ? indépendants ?

4. La variable aléatoire de loi $(n, P(\{n\}))$ admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

Exercice 8

On effectue une suite infinie de lancers d'une pièce équilibrée. On note X (resp. Y) la VA égale au rang d'apparition du premier pile (resp. face).

1. Déterminer la loi du couple (X, Y).

2. Calculer la covariance du couple (X, Y).

3. Déterminer la loi de la VA $S = X + Y$.

Exercice 9

On note pour tout $(i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2 : p_{ij} = \dfrac{1}{i(i+1)j(j+1)}$.

1. Montrer que la famille $(i, j, p_{ij})_{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est la loi de probabilité d'un couple (X, Y) de VA discrètes.

2. Déterminer les lois marginales de X et Y.

3. Montrer que X et Y sont indépendantes.

Exercice 10

Soient X et Y deux VA indépendantes suivant une loi de Poisson de paramètres respectifs $\lambda > 0$ et $\mu > 0$.

1. Déterminer la loi de $S = X + Y$. La reconnaître.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $(S = n)$. La reconnaître.