CB n° 12 - PROBABILITES - Sujet 1

EXERCICE 1

Soit $x \in \mathbb{R}$. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$p_n = \frac{x}{n(n+1)(n+2)}$$

1. Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}$$

2. Déterminer x pour que p_n définisse une probabilité sur $(\mathbb{N}^*, \mathscr{P}(\mathbb{N}^*))$.

3. Une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ suivant la loi $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet-elle une espérance ?

4. On pose $Y = (X-3)^2$, où X suit la loi $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

a. Déterminer la loi de Y.

b. Y admet-elle une espérance ?

EXERCICE 2

On lance (indéfiniment) une pièce déséquilibrée, Pile étant obtenu avec la probabilité $\dfrac{2}{3}$.

On note X (resp. Y) la variable aléatoire qui donne le rang d'apparition du premier Pile (resp. Face).

1. Déterminer la loi de X.

2. Justifier (précisément) que la loi du couple (X, Y) est donnée par :

$$\forall (i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \begin{cases} \dfrac{2^{j-1}}{3^j} & \text{si } 1 = i < j \\ \dfrac{2}{3^i} & \text{si } 1 = j < i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3. Comment peut-on retrouver la loi de X ?

4. Déterminer la covariance du couple (X, Y).

5. Déterminer la loi de la variable aléatoire $S = X + Y$.

CB n° 12 - PROBABILITES - Sujet 2

EXERCICE 1

Soit $x \in \mathbb{R}$. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$p_n = \frac{x}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

1. Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{a}{n+1} + \frac{b}{n+2} + \frac{c}{n+3}$$

2. Déterminer x pour que p_n définisse une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$.

3. Une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ suivant la loi $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet-elle une espérance ?

4. On pose $Y = (X-2)^2$, où X suit la loi $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

a. Déterminer la loi de Y.

b. Y admet-elle une espérance ?

EXERCICE 2

On lance (indéfiniment) une pièce déséquilibrée, Pile étant obtenu avec la probabilité $\frac{1}{3}$.

On note X (resp. Y) la variable aléatoire qui donne le rang d'apparition du premier Pile (resp. Face).

1. Déterminer la loi de X.

2. Justifier (précisément) que la loi du couple (X, Y) est donnée par :

$$\forall (i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad \mathbb{P}(X=i, Y=j) = \begin{cases} \dfrac{2}{3^j} & \text{si } 1 = i < j \\ \dfrac{2^{i-1}}{3^i} & \text{si } 1 = j < i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3. Comment peut-on retrouver la loi de X ?

4. Déterminer la covariance du couple (X, Y).

5. Déterminer la loi de la variable aléatoire $S = X + Y$.