Khôlles 9 et 10 : GENERALITES SUR LES FONCTIONS

1. Sachant que f est une fonction non identiquement nulle définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant pour tous réels a et b strictement positifs :

$$f(ab) = f(a) + f(b)$$

- $f(1) = 0$
- $\forall x > 0, \forall y > 0, f\left(\dfrac{1}{x}\right) = -f(x), \quad f\left(\dfrac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$
- $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall x > 0, f\left(x^n\right) = nf(x)$
- Pour tout réel strictement positif x, $f'(x) = \dfrac{f'(1)}{x}$.

2. Théorème des croissances comparées :
Pour a et b strictement positifs, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln(x))^a}{x^b} = 0, \quad \lim_{x\to 0} x^b |\ln(x)|^a = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{ax}}{x^b} = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} |x|^b \mathrm{e}^{ax} = 0$$

3. $\forall x \in [-1, 1], \quad \cos\left(\mathrm{Arcsin}(x)\right) = \sqrt{1 - x^2} \quad$ et $\quad \sin\left(\mathrm{Arccos}(x)\right) = \sqrt{1 - x^2}$

4. La fonction Arcsin est dérivable sur $]-1, 1[$ et on a :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \mathrm{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

5. La fonction Arccos est dérivable sur $]-1, 1[$ et on a :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \mathrm{Arccos}'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

6. $\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \begin{cases} \mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ \mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\dfrac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

7. La fonction Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{Arctan}'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$