Khôlles 7 et 8 : NOMBRES COMPLEXES

1. Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. On a :
- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
- $\overline{z \cdot z'} = \overline{z} \cdot \overline{z'}$
- Si $z' \neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$
- $z \cdot \overline{z} = |z|^2$
- $\overline{z^n} = \overline{z}^n$, pour $n \in \mathbb{N}^*$

2. Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. On a :
- $z \cdot \overline{z} = |z|^2$
- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- $|z| = |-z| = |\overline{z}|$
- $|zz'| = |z|\,|z'|$ et si $z' \neq 0$, $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall z \in \mathbb{C} \quad |z^n| = |z|^n$

3. Soit $(z, z') \in (\mathbb{C}^*)^2$. On a :
- $\arg\left(\overline{z}\right) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$
- $\arg(-z) \equiv \arg(z) + \pi\ [2\pi]$
- $\arg(z \cdot z') \equiv \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$ et $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$

4. Pour tout $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, on a :
- $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}$ et $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\theta')} = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}}$
- $\overline{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$
- $-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\pi)}$

5. Pour tout $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$:

$$1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}, \qquad 1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = -2\mathrm{i}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} = 2\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta+\theta'}{2}} \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} = 2\mathrm{i}\sin\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta+\theta'}{2}}$$

6. Soient A, B, C et D des points distincts d'affixes respectives a, b, c et d.

$$(AB)//(CD) \Leftrightarrow \arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right) \equiv 0\ [\pi]$$

$$(AB) \perp (CD) \Leftrightarrow \arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$$