Khôlles 5 et 6 : COMPLÉMENTS EN CALCUL ALGÉBRIQUE - TRIGONOMÉTRIE

1a. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

b. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

c. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

d. Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\displaystyle(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

e. Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$

2. Existence de la partie entière d'un réel :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists!\, n \in \mathbb{Z}, n \leq x < n+1$$

3. Toutes les formules de trigonométrie suivantes doivent être connues, mais leur démonstration à ce stade n'est pas exigible.

- $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \quad \Rightarrow \cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$
- $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) \quad \Rightarrow \sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$
- $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$