Khôlles 23 et 24 :
APPLICATIONS LINÉAIRES - INTÉGRATION

I. APPLICATIONS LINEAIRES

1. $\mathscr{L}(E,F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois usuelles.
Si E est F sont de dimensions finies, alors $\mathscr{L}(E,F)$ est de dimension finie et
$\dim(\mathscr{L}(E,F)) = \dim(E) \times \dim(F)$.

2. Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$. On a :
- Pour tout sous-espace vectoriel E_1 de E, $u(E_1)$ est un sous-espace vectoriel de F.
- Pour tout sous-espace vectoriel F_1 de F, $u^{-1}(F_1)$ est un sous-espace vectoriel de E.

3. Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$.
- Si $\mathscr{F}$ est une famille de vecteurs de E, alors on a : $u\left(\mathrm{Vect}(\mathscr{F})\right) = \mathrm{Vect}\left(u(\mathscr{F})\right)$.
- u est surjective si, et seulement si l'image par u d'une famille génératrice de E est une famille génératrice de F.
- u est injective si, et seulement si l'image par u d'une famille libre de E est une famille libre de F.
- u est bijective si, et seulement si l'image d'une base de E est une base de F.

4. Soit p une application de E dans E. Alors p est un projecteur $\Leftrightarrow \begin{cases} p \text{ linéaire} \\ p \circ p = p \end{cases}$.
Dans ce cas, p est le projecteur sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.

II. INTÉGRATION

1. Inégalité de Cauchy Schwarz pour les intégrales
Soient f et g deux fonctions réelles continues sur $[a,b]$. On a :

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leq \int_a^b f(x)^2\mathrm{d}x \int_a^b g(x)^2\mathrm{d}x$$

2. Inégalité de Taylor-Lagrange :
Soit f une fonction réelle ou complexe, de classe C^{n+1} sur $[a,b]$. on a :

$$\left|f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k\right| \leq \left|\sup_{x\in[a,b]} f^{(n+1)}(x)\right| \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$