Khôlles 15 et 16 : MATRICES - SYSTEMES LINEAIRES / ANALYSE ASYMPTOTIQUE

Remarque : Ces deux chapitres comportent assez peu de démonstrations aussi les points sur les bases reposeront essentiellement sur les exercices techniques.
Certaines démonstrations du chapitre sur l'analyse asymptotique sont toutefois exigibles :

1. On suppose que f et g sont définies au voisinage de a (fini ou infini), ne s'annulant pas au voisinage de a, sauf éventuellement en a (si $a \in \mathbb{R}$). On suppose que $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$.

- Si h est une fonction telle qu'au voisinage de a on ait $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ alors $h(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$

- Si $\lim\limits_a f = l$ (fini ou infini), alors $\lim\limits_a g = l$.

- Au voisinage de a, f et g sont de même signe.

- Soit h une fonction définie sur un intervalle J telle que $f \circ h$ et $g \circ h$ soient définies au voisinage de b avec $\lim\limits_b h = a$. Alors
$$f \circ h(x) \underset{x\to b}{\sim} g \circ h(x)$$

- Si f est une fonction positive au voisinage de a, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$:
$$f^\alpha(x) \underset{x\to a}{\sim} g^\alpha(x) \quad \text{et} \quad \mathrm{e}^{f(x)} \underset{x\to a}{\sim} \mathrm{e}^{g(x)} \Longleftrightarrow \lim_a (f-g) = 0$$

- Si f est strictement positive au voisinage de a et si $\lim\limits_a f = b \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ alors
$$\ln(f(x)) \underset{x\to a}{\sim} \ln(g(x))$$

2. Formule de Taylor-Young
Si f admet une dérivée n-ème en a, alors f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ qui s'écrit :
$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o\left((x-a)^n\right)$$

3. Si f admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ de partie régulière $\alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n$ pour $n \geq 2$, en notant $p = \left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor$, on a :
- Si f est paire, alors $\forall k \in [\![0, p-1]\!], \alpha_{2k+1} = 0$.
- Si f est impaire, alors $\forall k \in [\![0, p]\!], \alpha_{2k} = 0$.

4. Composition
Soient I et J des intervalles tels que $0 \in \overset{\circ}{I}$ et $0 \in \overset{\circ}{J}$, f une fonction définie sur I admettant un $\mathrm{DL}_n(0)$ de partie régulière $P(x)$ et g une fonction définie sur J admettant un $\mathrm{DL}_n(0)$ de partie régulière $Q(x)$. On suppose que $f(I) \subset J$. Si $f(0) = 0$, alors $g \circ f$ admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ dont la partie régulière est obtenue en tronquant $Q(P(x))$ au degré n.