P1 - Espaces probabilisés

1 Ensembles dénombrables

Définition 1
Un ensemble est dit *dénombrable* s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$.

Conséquence
Tout ensemble au plus dénombrable peut être écrit sous la forme $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$.

Exemple 1
- $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ sont des ensembles dénombrables.

Vocabulaire
Un ensemble est dit *au plus dénombrable* s'il est fini ou dénombrable.

Proposition 1
- Toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est dénombrable.
- Un ensemble est au plus dénombrable si et seulement si il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.

Conséquence
Tout ensemble au plus dénombrable peut être écrit sous la forme $\{x_n; n \in I\}$, où $I \subset \mathbb{N}$.

Proposition 2
$\mathbb{R}$ n'est pas un ensemble dénombrable.

Proposition 3
Le produit cartésien de deux ensembles dénombrables est dénombrable.

Exemple 2
- $\mathbb{Q}$ est un ensemble dénombrable.

2 Espace probabilisé

Dans la suite du chapitre, on s'intéresse à des expériences aléatoires dont l'*univers* sera noté Ω.

Comme cela a été vu dans le cas d'un univers fini, dans le cas d'un univers dénombrable, on peut considérer $\mathscr{P}(\Omega)$ comme l'ensemble des événements.
Toutefois, lorsque l'univers n'est pas dénombrable, il n'est pas toujours possible d'appréhender cet ensemble. C'est pourquoi on définit des familles particulières de parties de Ω, adaptées à l'étude de probabilités.

2.1 Notion de tribu

Définition 2
- Une *tribu* sur un ensemble Ω est un sous-ensemble $\mathscr{T}$ de $\mathscr{P}(\Omega)$ vérifiant les propriétés suivantes :

  1. $\Omega \in \mathscr{T}$.

  2. Pour tout $A \in \mathscr{T}$, le complémentaire $\overline{A}$ de A appartient à $\mathscr{T}$.

  3. Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{T}$, $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{T}$.

- Le couple $(\Omega, \mathscr{T})$ est appelé *espace probabilisable*.
- Un élément de $\mathscr{T}$ est appelé *événement*.

Remarque 1
- Tout événement d'un espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{T})$ est un sous ensemble de Ω, en revanche, si $\mathscr{T} \neq \mathscr{P}(\Omega)$, les sous-ensembles de Ω ne sont pas tous des événements.

Proposition 4
Soit $(\Omega, \mathscr{T})$ un espace probabilisable.
- $\varnothing \in \mathscr{T}$.
- Toute réunion finie d'éléments de $\mathscr{T}$ est un élément de $\mathscr{T}$.
- Toute intersection finie ou dénombrable d'éléments de $\mathscr{T}$ est un élément de $\mathscr{T}$.
- Pour tous A et B dans $\mathscr{T}$, $A \cap \overline{B} \in \mathscr{T}$.

Vocabulaire
- Si ω est un résultat d'une expérience aléatoire associée à un espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$, $\{\omega\}$ est appelé *événement élémentaire*.
- Un événement est dit *réalisé* s'il contient l'issue de l'expérience.
- L'événement Ω, toujours réalisé, est appelé *univers certain* ; l'événement $\varnothing$, jamais réalisé, est appelé *événement impossible*.
- Deux événements sont dits *incompatibles* s'ils sont disjoints.

2.2 Probabilité sur un espace probabilisable

Définition 3
- Une *probabilité* sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{T})$ est une application $\mathbb{P} : \mathscr{T} \to [0,1]$ telle que :
  1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
  2. Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{T}$ deux à deux incompatibles, la série de terme général $\mathbb{P}(A_n)$ converge, et :
  $$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$
  Cette égalité est dite *propriété de σ-additivité*.
- Le triplet $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$ est appelé *espace probabilisé*.

Conséquences :
- $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$.
- La probabilité d'une union finie d'événements deux à deux disjoints est égale à la somme de leurs probabilités.

Remarque 2
- Dans le cas où Ω est fini, et $\mathscr{T} = \mathscr{P}(\Omega)$, la définition induit celle vue dans le cas d'univers finis.

Proposition 5
Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé, où Ω est un ensemble dénombrable.
Alors pour tout $A = \{\omega_i, i \in \mathbb{N}\} \subset \Omega$, avec $\omega_i \neq \omega_j$ si $i \neq j$,

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{\omega_i\}).$$

Cette somme est indépendante de l'ordre d'énumération, et on écrit : $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega\in A} \mathbb{P}((\{\omega\})$.

Proposition 6
Soient une expérience aléatoire d'univers $\Omega = \mathbb{N}$ et $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de termes positifs de somme 1. Alors il existe une probabilité $\mathbb{P} : \mathscr{P}(\mathbb{N}) \to [0,1]$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(\{n\}) = p_n$$

2.3 Propriétés

Proposition 7
Soit $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Alors pour tous A et B dans $\mathscr{T}$:
- $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
- $A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Théorème 1 Théorème de la limite monotone
Soit $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
- Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'événements (c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1}$), alors :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

- Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante d'événements (c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}, A_{n+1} \subset A_n$), alors :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Proposition 8 Propriété de sous-additivité (ou **inégalité de Boole**)
Soient $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements telle que la série de terme général $\mathbb{P}(A_n)$ converge. Alors :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

3 Conditionnement et indépendance

3.1 Conditionnement

La notion de probabilité conditionnelle vue dans le cas d'un univers fini peut être généralisée dans le cas d'un univers quelconque.

Proposition 9
Soient $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et A un événement de probabilité non nulle. L'application :

$$\mathbb{P}_A : \left\{ \begin{array}{l} \mathscr{T} \to [0,1] \\ B \mapsto \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} \end{array} \right.$$

est une probabilité, appelée *probabilité conditionnellement à* A (ou *probabilité sachant* A).
L'espace $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P}_A)$ est un espace probabilisé.

Notation
On notera aussi $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}_A(B)$ la probabilité de B sachant A.

Proposition 10 Formule des probabilités composées

Soient $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ une suite d'événements telle que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) > 0$.

Alors, en notant $B_p = \bigcap_{k=1}^{p} A_k$ pour tout entier $p \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = \mathbb{P}_{B_{n-1}}(A_n)\,\mathbb{P}_{B_{n-2}}(A_{n-1})...\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\mathbb{P}(A_1)$$

Définition 4
Soit $(\Omega, \mathscr{T})$ un espace probabilisable sur un univers au plus dénombrable.
On appelle *système complet d'événements* toute suite d'événements $(A_n)_{n\in I}$ (où I est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$) telle que :

1. $\bigcup_{i\in I} A_i = \Omega$.

2. $\forall (i,j) \in I^2, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$.

Proposition 11 Formule des probabilités totales
Soient $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système complet d'événements. Alors pour tout $B \in \mathscr{T}$ la série de terme général $\mathbb{P}(A_k \cap B)$ converge et, en adoptant la convention : $\mathbb{P}_{A_k}(B)\mathbb{P}(A_k) = 0$ si $\mathbb{P}(A_k) = 0$, on a :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k \cap B) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}_{A_k}(B)\,\mathbb{P}(A_k)$$

Remarque 3
- Cette formule reste valable dans le cas d'une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements deux à deux incompatibles, tels que $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k) = 1$.

Proposition 12 Formule de Bayes
Soient $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système complet d'événements. Alors pour tout $B \in \mathscr{T}$ de probabilité non nulle, en adoptant la convention : $\mathbb{P}_{A_k}(B)\mathbb{P}(A_k) = 0$ si $\mathbb{P}(A_k) = 0$, on a :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \qquad \mathbb{P}_B(A_i) = \frac{\mathbb{P}_{A_i}(B)\,\mathbb{P}(A_i)}{\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}_{A_k}(B)\,\mathbb{P}(A_k)}$$

3.2 Indépendance

Définition 5
Soit $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
- Deux événements A et B sont *indépendants* si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$.
- Les événements $A_1, ..., A_n$ sont *deux à deux indépendants* si $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!], i \neq j \Rightarrow A_i$ et A_j indépendants.

Proposition 13
Soient $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $B \in \mathscr{T}$ tel $\mathbb{P}(B) > 0$, et $A \in \mathscr{T}$.
- A et B sont indépendants si, et seulement si $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$.
- Si A et B sont indépendants, alors A et $\overline{B}$ sont indépendants.

Définition 6
Soit $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
Une suite finie d'événements $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ est une *famille d'événements mutuellement indépendants* si pour tout sous-ensemble fini $I \subset [\![1, n]\!]$, non vide, $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k\in I} A_k\right) = \prod_{k\in I} \mathbb{P}(A_k)$.

Proposition 14
Des événements mutuellement indépendants sont deux à deux indépendants.

Attention !
La réciproque est fausse.