Géo 2 - Courbes et surfaces de l'espace

Dans ce chapitre on munit l'espace $\mathscr{E}$ d'un repère orthonormé $\mathscr{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

1 Courbes et surfaces paramétrées

Définition 1

- On appelle *courbe* (*gauche*) *paramétrée* par la fonction $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ de classe C^1 sur I, l'ensemble Γ des points de $\mathscr{E}$ de coordonnées $\varphi(t)$, avec $t \in I$.
  Le couple (I, φ), ou plus simplement φ, est appelé *arc paramétré.*
  C'est une *représentation paramétrique* de Γ, *support* de l'arc paramétré.

- On appelle *surface paramétrée* par la fonction $\psi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ de classe C^1 sur U, l'ensemble Σ de $\mathscr{E}$ de coordonnées $\psi(u, v)$, avec $(u, v) \in U$.
  Le couple (U, ψ), ou plus simplement ψ, est appelé *nappe paramétrée.*
  C'est une *représentation paramétrique* de Σ, *support* de la nappe paramétrée.

Remarque 1

- On note souvent (x, y, z) les fonctions coordonnées d'un arc paramétré φ identifié à un point mobile M de l'espace ; on note alors : $\varphi : t \mapsto M(t) = (x(t), y(t), z(t))$.

- De même, on note (x, y, z) les fonctions coordonnées d'une nappe paramétrée ψ identifiée à un point mobile M de l'espace ; on note alors : $\psi : (u, v) \mapsto M(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$.

Définition 2
Une nappe paramétrée (U, ψ) telle que $\psi : (u, v) \in U \mapsto (u, v, f(u, v)) \in \mathbb{R}^3$ où $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est de classe C^1, est dite *nappe paramétrée cartésienne.*

Définition 3
Soit Γ une courbe paramétrée par $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ de classe C^1.
- Un point $M(t)$ de Γ est dit *singulier* si $\varphi'(t) = 0_{\mathbb{R}^3}$.
- Un point $M(t)$ de Γ est dit *régulier* si $\varphi'(t) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$.
- Si tous les points de Γ sont réguliers, on dit que la courbe est *régulière.*

Définition 4
Soient Γ une courbe paramétrée par $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ de classe C^1, et M_0 un point régulier de Γ de coordonnées $\varphi(t_0)$. La *tangente* à Γ en M_0 est la droite :

$$T_{t_0} = M_0 + \mathrm{Vect}(\varphi'(t_0))$$

Définition 5
Soit Σ une surface paramétrée par $\psi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ de classe C^1.
On appelle *courbe coordonnée* de Σ tout courbe paramétrée par une application de la forme $t \mapsto \psi(u_0, t)$ ou $t \mapsto \psi(t, v_0)$ où $(u_0, v_0) \in U$.

Définition 6
Soit Σ une surface paramétrée par $\psi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ de classe C^1.
On dit qu'une courbe gauche Γ est *tracée* sur Σ s'il existe une paramétrisation de Γ de la forme $(I, \psi \circ f)$ (avec $f : I \to \mathbb{R}^2$ telle que $f(I) \subset U$).

Remarque 2
- Les courbes coordonnées sont des courbes tracées sur Σ.

Définition 7
Soit Σ une surface paramétrée par $\psi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ de classe C^1.
- Un point M_0 de Σ de coordonnées $\psi(u_0, v_0)$ est dit *régulier* si la famille $\left(\dfrac{\partial \psi}{\partial u}(u_0, v_0), \dfrac{\partial \psi}{\partial v}(u_0, v_0)\right)$ est libre, c'est-à-dire si :
$$\frac{\partial \psi}{\partial u}(u_0, v_0) \wedge \frac{\partial \psi}{\partial v}(u_0, v_0) \neq 0$$
- Si tous les points de Σ sont réguliers, on dit que la surface Σ est *régulière*.

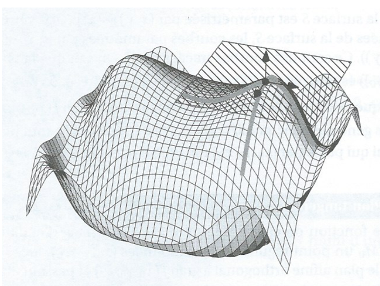
Remarque 3
- Toute surface admettant une paramétrisation cartésienne est régulière.

Définition 8
Soient Σ une surface paramétrée par $\psi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ de classe C^1, et M_0 un point régulier de Σ de coordonnées $\psi(u_0, v_0)$.

- Le *plan tangent* à Σ en M_0 est le plan
$$P_{M_0} = M_0 + \text{Vect}\left(\frac{\partial \psi}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial \psi}{\partial v}(u_0, v_0)\right)$$
- La (droite) *normale* à Σ en M_0 est la droite passant par M_0 et orthogonale à P_{M_0}.

Remarque 4
- La normale à Σ en M_0 est dirigée par $\dfrac{\partial \psi}{\partial u}(u_0, v_0) \wedge \dfrac{\partial \psi}{\partial v}(u_0, v_0)$.
- Soit Σ une surface admettant une paramétrisation cartésienne $\psi : (u, v) \mapsto (u, v, f(u, v))$.
Le plan tangent à Σ en M_0 de coordonnées (x_0, y_0, z_0) a pour équation :
$$z - z_0 = (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Proposition 1
Le plan tangent à une surface Σ en un point régulier est la réunion des tangentes aux courbes régulières tracées sur Σ, passant par ce point.



Remarque 5

- Soient Σ une surface régulière et Γ une courbe paramétrée par $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, tracée sur Σ.
  La tangente à Γ en un point régulier $\varphi(t)$ appartient au plan tangent à Σ en $\varphi(t)$.

2 Surfaces définies par une équation cartésienne

Dans ce paragraphe, V désigne un ouvert de $\mathbb{R}^3$.

Définition 9
Soit $F : V \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur V. L'ensemble Σ des points de l'espace de coordonnées (x, y, z) telles que $F(x, y, z) = 0$ est appelé *surface d'équation cartésienne* $F(x, y, z) = 0$.

Définition 10
Soient $F : V \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur V, et Σ la surface d'équation cartésienne $F(x, y, z) = 0$.

- On dit qu'un point M_0 de coordonnées (x_0, y_0, z_0) de Σ est *régulier* si $\overrightarrow{Grad\,F}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.
- Si tous les points de Σ sont réguliers, la surface est dite *régulière*.

Définition 11
Soient $F : V \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur V, et Σ la surface d'équation cartésienne $F(x, y, z) = 0$.
Une *courbe tracée* sur Σ est une courbe paramétrée par $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ vérifiant $\forall t \in I, F(\varphi(t)) = 0$.

Définition 12
Soient $F : V \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur V, Σ la surface d'équation cartésienne $F(x, y, z) = 0$, et M_0 un point régulier de Σ de coordonnées (x_0, y_0, z_0).
On appelle *plan tangent* à Σ en M_0 le plan passant par M_0 admettant $\overrightarrow{Grad\,F}(x_0, y_0, z_0)$ pour vecteur normal, c'est-à-dire :

$$\Pi_{t_0} = M_0 + \left(\overrightarrow{Grad\,F}(x_0, y_0, z_0)\right)^{\perp}$$

Proposition 2
Soient $F : V \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur V, Σ la surface d'équation cartésienne $F(x, y, z) = 0$ et Γ une courbe paramétrée par $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, tracée sur Σ.
La tangente à Γ en un point régulier $\varphi(t)$ appartient au plan tangent à Σ en $\varphi(t)$.

Proposition 3
Soient Σ_1 et Σ_2 deux surfaces d'équations cartésiennes respectives $F(x, y, z) = 0$ et $G(x, y, z) = 0$ où F et G sont des fonctions réelles définies sur V.
Sous certaines conditions (parmi lesquelles le fait que localement $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ ne coïncide pas avec Σ_1), l'ensemble des points M de coordonnées (x, y, z) vérifiant à la fois $F(x, y, z) = 0$ et $G(x, y, z) = 0$ définit une courbe tracée sur Σ_1 et Σ_2, c'est-à-dire un sous-ensemble de l'espace admettant localement une paramétrisation par une seule variable réelle.

Proposition 4
Soient Σ_1 et Σ_2 deux surfaces d'équations cartésiennes respectives $F(x, y, z) = 0$ et $G(x, y, z) = 0$ où F et G sont des fonctions réelles définies sur V.
La tangente à la courbe $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ est dirigée en tout point régulier M_0 de coordonnées (x_0, y_0, z_0) de $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ par le vecteur $\overrightarrow{Grad\,F}(x_0, y_0, z_0) \wedge \overrightarrow{Grad\,G}(x_0, y_0, z_0)$, s'il est non nul.
Dans ce cas, cette tangente coïncide avec l'intersection des plans tangents à Σ_1 et Σ_2 en M_0.

3 Exemples de surfaces

3.1 Surfaces réglées

Définition 13
Une *surface réglée* est une surface admettant une représentation paramétrique définie sur $I \times \mathbb{R}$ de la forme :

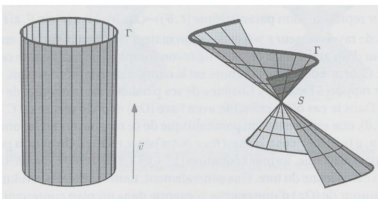
$$\psi : (t, \lambda) \mapsto \lambda m(t) + \varphi(t)$$

où m et φ sont deux fonctions de classe C^1 à valeurs dans $\mathbb{R}^3$.
La courbe paramétrée par φ est alors appelée *directrice* de la surface.

Remarque 6
- Une surface réglée est la réunion de droites, appelées *génératrices* de la surface.
- On dit qu'une surface réglée est engendrée par la famille de ses génératrices.

Proposition 5
Le plan tangent en un point régulier d'une surface réglée contient la génératrice passant par ce point.

Exemple 1 Cylindres et cônes
- Soient Γ une courbe paramétrée par $\varphi : I \to \mathbb{R}^3$, et $\vec{v}$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$.
  La surface réglée engendrée par la famille des droites dirigées par $\vec{v}$, et passant par un point de Γ est appelée *cylindre* de directrice Γ.
  Une représentation paramétrique de ce cylindre est :
  $$(t, \lambda) \mapsto \lambda \vec{v} + \varphi(t)$$
- Soient Γ une courbe paramétrée par $\varphi : I \to \mathbb{R}^3$, et S un point de $\mathscr{E}$.
  La surface réglée engendrée par la famille des droites passant par le sommet S et un point de Γ est appelée *cône* de directrice Γ.
  Une représentation paramétrique de ce cône est :
  $$(t, \lambda) \mapsto \lambda\, \overrightarrow{S\varphi(t)} + \varphi(t)$$



3.2 Surfaces de révolution

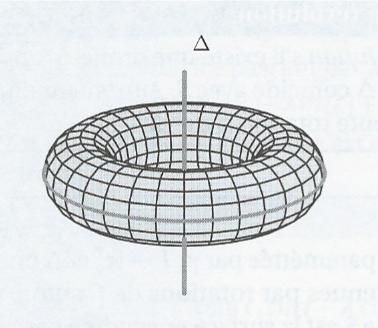
Définition 14
Une surface Σ est dite *de révolution* s'il existe une droite Δ, appelée *axe* de Σ telle que l'image de Σ par toute rotation d'axe Δ coïncide avec Σ.

Théorème-Définition 1
Soient Γ une courbe gauche paramétrée par $\varphi : I \to \mathbb{R}^3$, et Δ une droite de l'espace.
La réunion de la famille de courbes obtenues par rotations de Γ autour de Δ forme une surface Σ de révolution d'axe Δ.
On dit que Σ est la *surface engendrée par la rotation de* Γ *autour de* Δ.
En notant r_θ la rotation d'axe Δ et d'angle θ, on a : $\displaystyle\bigcup_{\theta \in \mathbb{R}} r_\theta(\Gamma)$.

Définition 15
Soit Σ une surface de révolution d'axe Δ. On appelle :
- *Méridiennes* de Σ les courbes d'intersection de Σ avec tout plan contenant Δ.
- *Parallèles* de Σ les courbes d'intersection de Σ avec tout plan orthogonal à Δ.
  (Ce sont des réunions de cercles.)
- *Plans méridiens* de Σ les plans contenant Δ.

Remarque 7
- Le plan tangent en tout point régulier d'une surface de révolution contient la droite orthogonale au plan méridien passant par ce point, ainsi que la tangente à la méridienne en ce point.

Exemple 2
- La surface ci-dessous est un tore.
  C'est une surface de révolution obtenue par la rotation autour de l'axe (Oz) d'un cercle contenu dans le plan (xOz).
  Les méridiennes sont les courbes verticales, les parallèles les courbes horizontales.



- La surface ci-dessous est un hyperboloïde à une nappe.
  C'est une surface réglée (figure de gauche)
  C'est aussi une surface de révolution : elle s'obtient par la rotation autour de l'axe (Oz) de l'hyperbole contenue dans le plan (xOz) d'équation cartésienne $x^2 - z^2 - 1 = 0$ (figure de droite).