Géo 1 - Courbes planes

Dans ce chapitre on munit le plan $\mathscr{P}$ d'un repère orthonormé $\mathscr{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$; $k \in \mathbb{N}^*$.

1 Courbes paramétrées

1.1 Définitions

Définition 1

- On appelle *arc paramétré* ou *courbe paramétrée* de classe C^k un couple (I, φ) où I est une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$, et $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$ est une fonction de classe C^k.
  Par abus de notation, on parle souvent de l'arc φ au lieu de (I, φ).
- L'ensemble $\Gamma = \varphi(I) = \{\varphi(t) | t \in I\}$ est appelé *support* de l'arc paramétré.

Définition 2

Soit Γ un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$. On dit que Γ est un *arc géométrique* ou une *courbe géométrique* s'il existe un arc paramétré (I, φ) dont Γ est le support.

Remarque 1

- Un arc paramétré peut représenter le mouvement d'un point mobile du plan dans un repère.
  On note alors : $\forall t \in I, M(t) = \varphi(t)$, et le support de φ est appelé *trajectoire* du mouvement décrit par $\varphi : t \mapsto M(t)$.

  Si $k \geq 2$, on appelle :
  - *vecteur vitesse* du mouvement (à l'instant t) le vecteur $\varphi'(t) = \dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}(t)$;
  - *vecteur accélération* du mouvement (à l'instant t) le vecteur $\varphi''(t) = \dfrac{\mathrm{d}^2M}{\mathrm{d}t^2}(t)$.
- Par abus de notation, on confondra souvent l'arc géométrique Γ avec l'arc paramétré (I, φ), et un point géométrique $M \in \Gamma$ avec un point $M(t)$, venant avec son paramètre, appelé point de paramètre t de φ.

Dans la suite du chapitre, Γ désigne un arc géométrique paramétré par $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$ de classe C^k.

Définition 3

- On dit que $M(t)$ est un point *de multiplicité* n si $\mathrm{card}(\varphi^{-1}(M)) = n$.
  Si $n = 1$, on dit que le point est *simple* ;
  Si $n = 2$, on dit que le point est *double* ;
  etc...
- Si tous les points de l'arc paramétré sont simples (c'est-à-dire si φ est injective), on dit que l'arc paramétré est *simple*.

Définition 4

- On dit que $M(t)$ est un point *stationnaire* ou *singulier* si $\varphi'(t) = 0$.
- On dit que $M(t)$ est un point *régulier* si $\varphi'(t) \neq 0$.
- Si tous les points de l'arc paramétré sont réguliers, on dit que l'arc paramétré est *régulier*.

Définition 5
Soient $t_0 \in I$ et $M_0 = M(t_0)$.
S'il existe un vecteur directeur de la droite $(M_0M(t))$ qui admet un vecteur limite $\overrightarrow{V_0}$ non nul quand t tend vers t_0, la droite passant par M_0 dirigée par $\overrightarrow{V_0}$ est appelée *tangente* à Γ en M_0 :

$$T_{t_0} = M_0 + \text{Vect}\left(\overrightarrow{V_0}\right)$$

Remarque 2
- Si on a seulement une limite à droite ou à gauche, on parlera de *demi-tangente*.

Théorème 1
Soient $t_0 \in I$ et $M_0 = M(t_0)$.
$\hookrightarrow$ Si $\varphi'(t_0) \neq 0$, alors $\varphi'(t_0)$ est un vecteur directeur de la tangente à Γ en M_0.
La tangente a pour équation $\begin{vmatrix} x - x_0 & x'(t_0) \\ y - y_0 & y'(t_0) \end{vmatrix} = 0.$

$\hookrightarrow$ Si $\varphi'(t_0) = 0$, et s'il existe $n \in [\![1, k]\!]$ tel que $\varphi^{(n)}(t_0) \neq 0$, alors un vecteur directeur de la tangente à Γ en M_0 est $\varphi^{(p)}(t_0)$ où $p = \inf\{n \in \mathbb{N}^* / \varphi^{(n)}(t) \neq 0\}$.
La tangente a pour équation $\begin{vmatrix} x - x_0 & x^{(p)}(t_0) \\ y - y_0 & y^{(p)}(t_0) \end{vmatrix} = 0.$

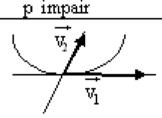
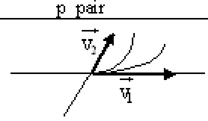
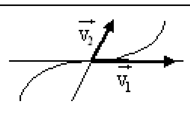
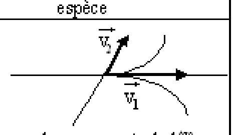
$\hookrightarrow$ Si x' ne s'annule pas au voisinage de t_0 :
* Si $\lim\limits_{t_0} \dfrac{y'}{x'} = l \in \mathbb{R}$, alors l est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point M_0.
* Si $\lim\limits_{t_0} \dfrac{y'}{x'} = \pm\infty$, alors $\vec{\jmath}$ est un vecteur directeur de la tangente à la courbe au point M_0.

Définition 6
Soient $t_0 \in I$ et $M_0 = M(t_0)$. Si φ est de classe $\mathcal{C}^2$, on dit que le point M_0 est *birégulier* si la famille $(\varphi'(t_0), \varphi''(t_0))$ est libre, c'est-à-dire $\det(\varphi'(t_0), \varphi''(t_0)) \neq 0$.
La courbe paramétrée est dite *birégulière* si tous ses points sont biréguliers.

1.2 Etude locale des courbes paramétrées

1.2.1 Classification des points

Soient $t_0 \in I$ et $M_0 = \varphi(t_0)$.
On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\varphi^{(n)}(t_0) \neq 0$, et on note p le plus petit des entiers n vérifiant cette propriété ; on note : $\overrightarrow{V_1} = \varphi^{(p)}(t_0)$.
On suppose qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $(\varphi^{(p)}(t_0), \varphi^{(m)}(t_0))$ soit une famille libre, et on note q le plus petit des entiers m vérifiant cette propriété ; on note : $\overrightarrow{V_2} = \varphi^{(q)}(t_0)$.

	p impair	p pair
q pair	 point ordinaire	 rebroussement de 2ème espèce
q impair	 point d'inflexion	 rebroussement de 1ère espèce

1.2.2 Branches infinies

Définition 7
Soit $t_0 \in \overline{I}$ une borne de I.
On dit que Γ présente une *branche infinie* en t_0 si : $\lim\limits_{t \to t_0} \|\overrightarrow{OM(t)}\| = +\infty$.

Remarque 3
- Cela revient à dire qu'une au moins des coordonnées de $M(t)$ tend vers l'infini quand $t \to t_0$.

Proposition 1
On note $\varphi = (x, y)$, et on considère $t_0 \in \overline{I}$ une borne de I.
- Si $\begin{cases} \lim\limits_{t_0} x = \pm\infty \\ \lim\limits_{t_0} y = y_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$ la droite d'équation $y = y_0$ est asymptote à Γ.
- Si $\begin{cases} \lim\limits_{t_0} x = x_0 \in \mathbb{R} \\ \lim\limits_{t_0} y = \pm\infty \end{cases}$ la droite d'équation $x = x_0$ est asymptote à Γ.
- Si $\begin{cases} \lim\limits_{t_0} x = \pm\infty \\ \lim\limits_{t_0} y = \pm\infty \end{cases}$ on étudie alors la *direction asymptotique* :

  Pour cela, on étudie la limite de $\dfrac{y}{x}$ en t_0.
  $\hookrightarrow$ Si $\lim\limits_{t_0} \dfrac{y}{x} = 0$, alors Γ admet $(O, \vec{\imath})$ pour direction asymptotique, et présente une *branche parabolique* de direction (Ox).
  $\hookrightarrow$ Si $\lim\limits_{t_0} \left|\dfrac{y}{x}\right| = +\infty$, alors Γ admet $(O, \vec{\jmath})$ pour direction asymptotique, et présente une *branche parabolique* de direction (Oy).
  $\hookrightarrow$ Si $\lim\limits_{t_0} \dfrac{y}{x} = a \in \mathbb{R}^*$, alors Γ admet une direction asymptotique de coefficient directeur a et :
  $\rightsquigarrow$ Si $\lim\limits_{t_0}(y - ax) = \pm\infty$, Γ admet une branche parabolique dans la direction de $\Delta : y = ax$;
  $\rightsquigarrow$ Si $\lim\limits_{t_0}(y - ax) = b \in \mathbb{R}$, Γ admet la droite d'équation $y = ax + b$ pour asymptote.

Remarque 4
- On précise la position de la Γ par rapport à une éventuelle asymptote en étudiant le signe de $y(t) - ax(t) - b$, à l'aide de développements limités ou de développements asymptotiques au voisinage de t_0 la plupart du temps.

1.3 Enveloppe d'une famille de droites

Définition 8
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(D_t)_{t \in I}$ une famille de droites. On appelle *enveloppe* de la famille de droites $(D_t)_{t \in I}$, un arc paramétré (I, φ) tel que pour tout $t \in I$ la droite D_t soit tangente à l'arc paramétré en $M(t)$.

Théorème 2
Soit une famille $(D_t)_{t \in I}$ de droites d'équation : $a(t)x + b(t)y + c(t) = 0$
où $t \in I$, avec a, b et c des fonctions de classe C^1 sur I vérifiant :

$$\forall t \in I, \begin{vmatrix} a(t) & b(t) \\ a'(t) & b'(t) \end{vmatrix} \neq 0$$

Alors cette famille de droites admet une enveloppe paramétrée par $(x = x(t), y = y(t))$ où $(x(t), y(t))$ est la solution du système :

$$\begin{cases} a(t)x + b(t)y + c(t) = 0 \\ a'(t)x + b'(t)y + c'(t) = 0 \end{cases}$$

2 Propriétés métriques d'une courbe plane

Dans la suite du chapitre, on considère un arc paramétré (I, φ) de classe C^k, de support Γ, **régulier**, *orienté* dans le sens de t croissant. On choisit un point de Γ comme origine : $M_0 = M(t_0)$.

On notera $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$.

2.1 Longueur d'un arc

Définition 9
Soit $(a,b) \in I^2$. La *longueur* de l'arc entre les points de paramètres a et b (avec $a < b$) est :

$$l_{a,b}(\varphi) = \int_a^b \|\varphi'(t)\| \mathrm{d}t = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \mathrm{d}t$$

2.2 Abscisse curviligne

Définition 10
On appelle *abscisse curviligne* de $M(t)$ d'origine M_0 la longueur de l'arc $\overset{\frown}{M_0M}(t)$.
On la note $s(t)$, et on a :

$$\forall t \in I, \qquad s(t) = \int_{t_0}^t \|\varphi'(u)\| \mathrm{d}u$$

On notera $\mathrm{d}s = \|\varphi'(t)\| \mathrm{d}t$.

Définition 11
On appelle *paramétrage normal* de Γ tout paramétrage (I, φ) tel qu'en tout point $M(t)$ on ait :

$$\|\varphi'(t)\| = 1$$

Remarque 5
- Un paramétrage normal correspond à un parcours de Γ à une vitesse constante égale à 1.

Proposition 2
La courbe paramétrée définie par la fonction vectorielle $\zeta = \varphi \circ s^{-1} : s(I) \to \mathbb{R}^2$ (où s est l'abscisse curviligne d'origine M_0 sur Γ) a également pour support Γ, et son paramétrage est normal.

2.3 Repère de Frenet

Définition 12
On appelle :

- *vecteur tangent unitaire* en $M(t)$ le vecteur $\overrightarrow{T} = \dfrac{\overrightarrow{\varphi'(t)}}{\|\overrightarrow{\varphi'(t)}\|}$;
- *vecteur normal unitaire* en $M(t)$ le vecteur $\overrightarrow{N}$ directement orthogonal à $\overrightarrow{T}$;
- *normale* à Γ en $M(t)$ la droite passant par M dirigée par $\overrightarrow{N}$.
- *Repère de Frenet* en $M(t)$ le repère orthonormé $(M, \overrightarrow{T}, \overrightarrow{N})$.

Proposition 3
Si s est l'abscisse curviligne (d'origine M_0), alors :

$$\overrightarrow{T} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{d}s}$$

Remarque 6

- $\overrightarrow{T}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{N}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.
- $\|\overrightarrow{T}\| = 1 \Rightarrow 2\overrightarrow{T} \cdot \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}s} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{N}$ colinéaire à $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}s}$.

Attention !
En général $\overrightarrow{N} \neq \dfrac{\varphi''(t)}{\|\varphi''(t)\|}$.

2.4 Courbure et rayon de courbure

Théorème 3 Théorème de relèvement
Si $k \geq 2$, alors il existe une fonction α de classe C^1 sur I telle que :

$$\forall t \in I, \qquad \overrightarrow{T(t)} = \cos(\alpha(t))\vec{\imath} + \sin(\alpha(t))\vec{\jmath}$$

Remarque 7

- La fonction α est appelée *inclinaison* car elle représente l'angle $\left(\vec{\imath}, \overrightarrow{T}\right)$.

Théorème 4 Formules de Frenet
On suppose $k \geq 2$; on considère un paramétrage normal de Γ (de paramètre s qui coïncide avec l'abscisse curviligne), et on se place en un point $M(s)$ birégulier. Alors :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\overrightarrow{N} = \gamma\overrightarrow{N} \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{N}}{\mathrm{d}s} = -\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\overrightarrow{T} = -\gamma\overrightarrow{T}$$

Définition 13
Avec les notations du théorème précédent :

- Le réel $\gamma = \dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}$ est appelé *courbure* de Γ en M
- Le réel $R = \dfrac{1}{\gamma}$ est appelé *rayon de courbure* en M.
- On appelle *centre de courbure* en M le point Ω tel que $\overrightarrow{M\Omega} = R\overrightarrow{N}$.
- On appelle *cercle de courbure* en M le cercle de centre Ω de rayon $|R|$.
- On appelle *développée* d'un arc paramétré l'ensemble des centres de courbures en tout point de l'arc.

Théorème 5
La développée d'un arc paramétré est l'enveloppe des normales à l'arc.

Proposition 4
On note $\varphi = (x, y)$, avec x et y de classe C^2.
Le rayon de courbure est donné par :

$$R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y'' - x''y'}$$

Le centre de courbure est donné par :

$$\begin{cases} X = x - \dfrac{y'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - x''y'} \\[2ex] Y = y + \dfrac{x'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - x''y'} \end{cases}$$