AN 7 - Intégrales dépendant d'un paramètre

Dans ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; I et J désignent des intervalles de $\mathbb{R}$ non réduits à un point.
On note $\overset{\circ}{J}$ l'intérieur de J (c'est-à-dire l'intervalle J privé de ses bornes).

Vocabulaire
On étudie dans ce chapitre les fonctions f de la forme $f(x) = \displaystyle\int_J g(x,t)\mathrm{d}t$ où $x \in I$.
x s'appelle le *paramètre*. C'est pourquoi on dit aussi que f est une *intégrale dépendant d'un paramètre.*

1 Continuité

Théorème 1 Théorème de continuité

Soit $g : I \times J \to \mathbb{K}$. On suppose que :

- $\forall x \in I$, la fonction $t \mapsto g(x,t)$ est continue sur $\overset{\circ}{J}$.
- $\forall t \in J$, la fonction $x \mapsto g(x,t)$ est continue sur I.
- **Hypothèse de domination** :
  Il existe une fonction $\varphi : J \to \mathbb{R}$, positive et intégrable sur J telle que :
  $$\forall (x,t) \in I \times J, |g(x,t)| \leq \varphi(t)$$

Alors la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_J g(x,t)\mathrm{d}t$ est continue sur I.

Corollaire
Soit $g : I \times J \to \mathbb{K}$. On suppose que :

- $\forall x \in I$, la fonction $t \mapsto g(x,t)$ est continue sur $\overset{\circ}{J}$.
- $\forall t \in J$, la fonction $x \mapsto g(x,t)$ est continue sur I.
- **Hypothèse de domination** :
  Pour tout segment $[a,b]$ inclus dans I, il existe une fonction $\varphi_{a,b} : J \to \mathbb{R}$, positive et intégrable sur J telle que :
  $$\forall (x,t) \in [a,b] \times J, |g(x,t)| \leq \varphi_{a,b}(t)$$

Alors la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_J g(x,t)\mathrm{d}t$ est continue sur I.

Remarque 1
- Si J est un segment, et g est continue sur $I \times J$, alors les hypothèses sont acquises et f est continue sur I.

2 Dérivation

Théorème 2 Théorème de dérivation - Formule de Leibniz

Soit $g : I \times J \to \mathbb{K}$. On suppose que :

- $\forall x \in I$, la fonction $t \mapsto g(x,t)$ est intégrable sur J.
- $\forall t \in J$, la fonction $x \mapsto g(x,t)$ est de classe C^1 sur I.
- $\forall x \in I$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\overset{\circ}{J}$
- **Hypothèse de domination** :
  Il existe une fonction $\varphi : J \to \mathbb{R}$, positive et intégrable sur J telle que :

$$\forall (x,t) \in I \times J, |\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)| \leq \varphi(t)$$

Alors la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_J g(x,t)\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur I, et $\forall x \in I$:

$$f'(x) = \int_J \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t$$

Corollaire

Soit $g : I \times J \to \mathbb{K}$. On suppose que :

- $\forall x \in I$, la fonction $t \mapsto g(x,t)$ est intégrable sur J.
- $\forall t \in J$, la fonction $x \mapsto g(x,t)$ est de classe C^1 sur I.
- $\forall x \in I$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\overset{\circ}{J}$
- **Hypothèse de domination** :
  Pour tout segment $[a,b]$ inclus dans I, il existe une fonction $\varphi_{a,b} : J \to \mathbb{R}$, positive et intégrable sur J telle que :

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times J, |\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)| \leq \varphi_{a,b}(t)$$

Alors la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_J g(x,t)\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur I, et $\forall x \in I$:

$$f'(x) = \int_J \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t$$

Remarque 2

- Si J est un segment, et g est de classe C^1 sur $I \times J$, alors les hypothèses sont acquises, et f est de classe C^1 sur I.