AN 6 - Fonctions de plusieurs variables

Dans tout le chapitre U désigne un **ouvert** non vide de $\mathbb{R}^p$ avec $p \in \{2, 3\}$.

1 Limites et Continuité

Définition 1
Une *fonction réelle de plusieurs variables* (réelles) est une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}^p$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Notation
L'ensemble des fonctions réelles définies sur $D \subset \mathbb{R}^p$ est noté $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$.

Remarque 1
• $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ muni des lois usuelles est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Définition 2
Soient $f \in \mathcal{F}(U, \mathbb{R})$ et $a \in \overline{U}$.
On dit que f *admet une limite* l en a si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0 / \forall x \in U, (\|x - a\| < r \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$$

Proposition 1
Soient $f \in \mathcal{F}(U, \mathbb{R})$ et $a \in \overline{U}$. Si f admet une limite en a, alors elle est unique.
On la note $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ ou $\lim\limits_{a} f$.

Proposition 2
Soit $a \in \overline{U}$. Le sous-ensemble des fonctions de $\mathcal{F}(U, \mathbb{R})$ admettant une limite en a est un sous-espace vectoriel de l'ensemble de $\mathcal{F}(U, \mathbb{R})$.
Sur ce sev, l'application $f \mapsto \lim\limits_{a} f$ est linéaire, c'est-à-dire :
si f et g sont deux fonctions de $\mathcal{F}(U, \mathbb{R})$ admettant une limite en a, alors

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \lim_{a} (\lambda f + \mu g) = \lambda \lim_{a} f + \mu \lim_{a} g$$

Définition 3
Soient $f \in \mathcal{F}(U, \mathbb{R})$, et $a \in U$.
• On dit que f est *continue* en a si f admet une limite en a.
• On dit que f est *continue sur* $D \subset U$ si f est continue en tout point de D.
• On dit que f est *continue*, si f est continue sur U.

Remarque 2
• Si f est continue en a, alors $\lim\limits_{a} f = f(a)$.

Proposition 3
Soient $f \in \mathcal{F}(U, \mathbb{R})$ continue en a, et $g : I \to \mathbb{R}$ telle que $f(U) \subset I$, continue en $f(a)$. Alors $g \circ f$ est continue en a.

Proposition 4
Soient f et g deux fonctions de $\mathcal{F}(U, \mathbb{R})$ continues en a, $\lambda \in \mathbb{R}$; les fonctions $f+g$, λf, $\dfrac{1}{f}$ (si elle existe) et $f \times g$ sont continues en a.

Notation
Les fonctions continues sur U à valeurs dans $\mathbb{R}$ sont notées $\mathcal{C}(U, \mathbb{R})$ (ou $\mathcal{C}^0(U, \mathbb{R})$).

Proposition 5
$\mathcal{C}(U, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(U, \mathbb{R})$.

Proposition 6
Les applications "composantes" :

$$\forall i \in [\![1, p]\!], \qquad \mathrm{d}x_i : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^p & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, \cdots, x_p) & \mapsto & x_i \end{array} \right.$$

sont continues sur $\mathbb{R}^p$.

Définition 4
Soient $f \in \mathcal{F}(U, \mathbb{R})$ et $a = (a_1, \ldots, a_p) \in U$.
Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, on note $E_i = \{t \in \mathbb{R} \ / \ (a_1, \ldots a_{i-1}, t, a_{i+1}, \ldots, a_p) \in U\}$.
On appelle *i-ème fonction partielle* de f en a l'application :

$$f_i : \left| \begin{array}{ccc} E_i & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f_i(t) = f(a_1, ..., a_{i-1}, t, a_{i+1}, ..., a_p) \end{array} \right.$$

Proposition 7
Soit $f \in \mathcal{F}(U, \mathbb{R})$, continue en $a \in U$. Alors, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, la i-ème fonction partielle de f en a est continue en a_i.

Attention !
La réciproque est fausse.

Théorème 1
Une fonction continue sur un fermé borné de $\mathbb{R}^p$ est bornée et atteint ses bornes.

2 Dérivées partielles du premier ordre

Définition 5
Soient $f \in \mathcal{F}(U, \mathbb{R})$, et $a = (a_1, a_2, \cdots, a_p) \in U$
On dit que f admet une *dérivée partielle par rapport à la i-ème variable* x_i, au point a si la i-ème fonction partielle de f en a admet une dérivée en a_i.
Si elle existe, on note :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \partial_i f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1, a_2, \cdots, a_i + t, \cdots, a_p) - f(a_1, a_2, \cdots, a_i, \cdots, a_p)}{t}$$

appelée *dérivée partielle* (*d'ordre 1*) de f en a *par rapport à la i-ème variable* ou *i-ème dérivée partielle* (*d'ordre 1*) de f en a.

Si cette limite n'existe pas, alors on dit que f n'admet pas de dérivée partielle par rapport à la i-ème variable au point a.

Remarque 3
- Quand il n'y a que 2 ou 3 variables on note souvent les dérivées partielles de la façon suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial z} \text{ au lieu de } \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

ou bien également, si les variables sont ρ et θ :

$$\frac{\partial f}{\partial \rho} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial \theta}$$

Attention !
Une fonction de plusieurs variables peut ne pas être continue en a, et admettre des dérivées partielles en a !

Définition 6
Soit $f \in \mathcal{F}(U, \mathbb{R})$. Si elle existe, on appelle encore *i-ème dérivée partielle* de f la fonction réelle $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ définie sur U par $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} : a \in U \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) \in \mathbb{R}$

Définition 7
On dit que $f \in \mathcal{F}(U, \mathbb{R})$ est de *classe* $\mathcal{C}^1$ sur U si f admet p dérivées partielles continues sur U, c'est à dire si : $\forall i \in [\![1, p]\!]$, l'application partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ est définie et continue sur U.

Notation
L'ensemble des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^1$ sur U est noté $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$.

Exemple 1
1. Les fonctions linéaires de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ sont de classe C^1.
2. Les fonctions polynomiales de la forme :

$$(x_1, ..., x_p) \mapsto \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in I} \lambda_{(\alpha_1, \dots, \alpha_p)} x_1^{\alpha_1} ... x_p^{\alpha_p}$$

où I est un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}^p$, sont de classe C^1.

Proposition 8
$\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(U, \mathbb{R})$.
De plus $\forall i \in [\![1, n]\!]$ l'application définie sur $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ par $f \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ est linéaire, c'est-à-dire : si f et g sont deux fonctions de $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$,alors :

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial x_i} = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial g}{\partial x_i}$$

Théorème 2
Soient f et g dans $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$. Alors :
- $f \times g$ est de classe C^1 sur U, et $\forall i \in [\![1, n]\!]$:

$$\frac{\partial(f \times g)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \times g + f \times \frac{\partial g}{\partial x_i}$$

- $\dfrac{1}{g}$ est de classe C^1 sur tout ouvert $V \subset U$ sur lequel g ne s'annule pas, et $\forall i \in [\![1, n]\!]$:

$$\frac{\partial \frac{1}{g}}{\partial x_i} = -\frac{1}{g^2} \frac{\partial g}{\partial x_i}$$

Définition 8
Soient $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ et $a \in U$. On appelle **gradient** de f en a, le vecteur $\overrightarrow{Grad\, f}(a)$ défini par :

$$\overrightarrow{Grad\, f}(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_p}(a) \end{pmatrix}$$

On le note également $\nabla f(a)$ (se lit *"nabla"* f en a).

Théorème-Définition 1 Formule de Taylor Young à l'ordre 1
Soit f une application de classe C^1 sur une boule ouverte $B(a, r)$ de $\mathbb{R}^p$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Alors, $\forall h = (h_1, \dots, h_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $||h|| < r$, on a :

$$f(a+h) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \times h_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_p}(a) \times h_p + \|h\| \varepsilon(h)$$

où $\varepsilon \in \mathcal{F}(U, \mathbb{R})$ est telle que $\lim\limits_{h \to 0_{\mathbb{R}^p}} \varepsilon(h) = 0$.

Cette expression s'appelle le **développement limité de f à l'ordre 1**.

Notation différentielle
Si on note $\mathrm{d}x_i : h = (h_1, \cdots, h_p) \mapsto h_i$ la i-ème application composante, on note $\mathrm{d}f = \sum\limits_{i=1}^{p} \dfrac{\partial f}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i$.
Ainsi, $\forall a \in U, \forall h = (h_1, ..., h_p) \in \mathbb{R}^p$,

$$\mathrm{d}f(a).h = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \times h_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_p}(a) \times h_p$$

Théorème 3
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $(x_1, x_2, \cdots, x_p) \in (C^1(I, \mathbb{R}))^p$ et $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^p$ tel que $\forall t \in I, (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_p(t)) \in U$.
Alors, la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par :

$$\forall t \in I, F(t) = f\big(x_1(t), x_2(t), \cdots, x_p(t)\big)$$

est de classe C^1 sur I et vérifie :

$$\forall t \in I, F'(t) = \sum_{i=1}^{p} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1(t), ..., x_p(t)) \times x_i'(t) \right)$$

Remarque 4
- En utilisant la notation différentielle, pour $p = 3$, on a :

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt},$$

  ce qui donne :

$$dF = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz.$$

3 Application en géométrie

Dans cette section, on se place dans le plan orienté $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$;
U désigne toujours un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Définition 9
Soit $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$. L'ensemble Γ des points M du plan de coordonnées (x, y) vérifiant $f(x, y) = 0$ est appelé *courbe plane d'équation cartésienne* $f(x, y) = 0$.

Théorème 4 Théorème des fonctions implicites

Soit $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$. On note Γ la courbe plane d'équation cartésienne $f(x, y) = 0$.
Soit M_0 un point du plan de coordonnées (x_0, y_0) telles que :

$$\begin{cases} f(x_0, y_0) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0 \end{cases}$$

Alors il existe deux intervalles ouverts I et J centrés en x_0 et y_0 respectivement, avec $I \times J \subset U$, et une fonction $\varphi : I \to J$ de classe $\mathcal{C}^1$ tels que :

$$\forall (x, y) \in I \times J,\ f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x)$$

Remarque 5 Reformulation

- Si $\overrightarrow{Grad\, f}(x_0, y_0)$ n'est pas colinéaire à $\vec{\imath}$, alors au voisinage de (x_0, y_0) il existe un paramétrage local de Γ par la première variable x.

Définition 10
Soit $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$. On note Γ la courbe plane d'équation cartésienne $f(x, y) = 0$.

- On dit qu'un point M_0 de coordonnées (x_0, y_0) de Γ est un *point régulier* de Γ si $\overrightarrow{Grad\, f}(x_0, y_0) \neq \vec{0}$.
- On dit que Γ est une *courbe régulière* si tous ses points sont réguliers.

Proposition 9
Soit $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$. On note Γ la courbe plane d'équation cartésienne $f(x, y) = 0$.
Soit M_0 un point régulier de Γ de coordonnées (x_0, y_0). Alors :

- L'équation de la tangente à Γ en M_0 est donnée par :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

- Le vecteur $\overrightarrow{Grad\, f}(x_0, y_0)$ est orthogonal à la ligne de niveau $f(x, y) = f(x_0, y_0)$ (c'est-à-dire $\overrightarrow{Grad\, f}(x_0, y_0)$ est orthogonal à tout vecteur directeur de la tangente à la courbe d'équation $f(x, y) = f(x_0, y_0)$ en (x_0, y_0)), et orienté dans le sens des valeurs croissantes de f.

4 Dérivées partielles d'ordre 2

Définition 11
Soit $f \in \mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$. En cas d'existence, on appelle *dérivées partielles d'ordre 2* ou *dérivées partielles secondes* de f, les dérivées partielles des dérivées partielles (premières) de f.

En cas d'existence, on note, pour $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$:

$$\partial_{i,j}(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x_j}}{\partial x_i}$$

la i-ème dérivée partielle de la j-ème dérivée partielle, et si $i = j$, on note :

$$\partial_{i,i}(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x_i}}{\partial x_i}$$

Remarque 6
- Il y a donc au maximum p^2 dérivées partielles secondes.

Définition 12
Soit $f \in \mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$.
On dit que f est *de classe* $\mathcal{C}^2$ sur U si les p applications $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots, \dfrac{\partial f}{\partial x_p}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

Remarque 7
- $f \in \mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U si elle admet des dérivées partielles secondes et que celles-ci sont continues sur U.

Notation
L'ensemble des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^2$ sur U est noté $\mathcal{C}^2(U,\mathbb{R})$.

Proposition 10
$\mathcal{C}^2(U,\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(U,\mathbb{R})$.

De plus $\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2$ l'application définie sur $\mathcal{C}^2(U,\mathbb{R})$ par $f \mapsto \partial_{i,j}(f)$ est linéaire, c'est-à-dire :
si f et g sont deux fonctions de $\mathcal{C}^2(U,\mathbb{R})$,alors :

$$\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \partial_{i,j}(\lambda f + \mu g) = \lambda \partial_{i,j}(f) + \mu \partial_{i,j}(g)$$

Théorème 5
On considère deux applications f et g de classe C^2 sur U. Alors :
- $f \times g$ est de classe C^2 sur U.
- $\dfrac{f}{g}$ est de classe C^2 sur tout ouvert $V \subset U$ sur lequel g ne s'annule pas.

Théorème 6 Théorème de Schwarz
Soit $f \in \mathcal{F}(U,\mathbb{R})$. **Si** f est de classe C^2, **alors** :

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

Remarque 8
- Ce théorème donne une condition nécessaire et permet donc surtout de montrer le caractère non $\mathcal{C}^2$ d'une application.
- Si f est de classe C^2 sur U, alors l'opération de dérivation partielle est commutative.
  On dit alors que, pour f, les dérivées partielles secondes croisées sont égales.

Théorème 7 Formule de Taylor-Young à l'ordre 2
Soit f une application de classe C^2 sur une boule ouverte $B(a,r)$ de $\mathbb{R}^p$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Alors, $\forall h=(h_1,\dots,h_p)\in\mathbb{R}^p$ tel que $||h||<r$, on a :

$$f(a+h)=f(a)+\sum_{i=1}^{p}h_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{p}h_ih_j\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)+\|h\|^2\varepsilon(h)$$

où $\varepsilon\in\mathcal{F}(U,\mathbb{R})$ est telle que $\lim\limits_{h\to 0_{\mathbb{R}^p}}\varepsilon(h)=0$.

5 Extrema d'une fonction de deux variables ($p=2$)

Définition 13
Soient $f\in\mathcal{F}(U,\mathbb{R})$ et $a\in U$.
- On dit que f admet un *maximum local* en a si :

$$\exists r\in\mathbb{R}_+^*\ /\ \forall x\in B(a,r),\ f(x)\leq f(a).$$

- On dit que f admet un *maximum local strict* en a si :

$$\exists r\in\mathbb{R}_+^*\ /\ \forall x\in B(a,r)\backslash\{a\},\ f(x)<f(a).$$

- On dit que f admet un *maximum global* sur $D\subset U$ si :

$$\exists a\in D\ /\ \forall x\in D,\ f(x)\leq f(a).$$

- On dit que f admet un *maximum global strict* sur $D\subset U$ si :

$$\exists a\in D\ /\ \forall x\in D\setminus\{a\},\ f(x)<f(a).$$

Remarque 9
- On a les mêmes définitions pour un minimum.

Définition 14
Soit $f\in\mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$. On appelle *point critique* de f tout point de U en lequel toutes les dérivées partielles de f sont nulles.

Remarque 10
- Un point critique est donc un point en lequel le gradient est nul.

Théorème 8 CN d'existence
Soit $f\in\mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$. **Si** f admet un extremum local en $u\in U$, **alors** u est un point critique de f.

Attention !
La réciproque est fausse.

Remarque 11
- Un extremum global de f de classe C^1 sur un ensemble F fermé borné, est donc à rechercher :
  $\hookrightarrow$ parmi les extrema locaux sur l'intérieur $\overset{\circ}{F}$,

  $\hookrightarrow$ ou parmi les autres points, ceux de $\mathrm{Fr}(F)$.

Définition 15
Soit $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$. On appelle *matrice hessienne* de f en a la matrice :

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \end{pmatrix}$$

Remarque 12
- $H_f(a)$ est symétrique puisque, f étant de classe C^2, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)$

Proposition 11
Soient $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ et $a \in U$ un point critique de f.
Si la matrice hessienne de f en a (qui est symétrique réelle, donc diagonalisable) admet deux valeurs propres λ et μ non nulles, alors :

$\hookrightarrow$ Si λ et μ sont de signes contraires ($\det(H_f(a)) < 0$), alors f n'admet pas d'extremum en a ;
le point a est alors appelé *point col*, ou *point selle*.

$\hookrightarrow$ Si λ et μ sont de même signe ($\det(H_f(a)) > 0$), alors
  $\hookrightarrow$ Si $\lambda > 0$ et $\mu > 0$ ($\mathrm{tr}(H_f(a)) > 0$), f admet un minimum local en a ;
  $\hookrightarrow$ Si $\lambda < 0$ et $\mu < 0$ ($\mathrm{tr}(H_f(a)) < 0$), f admet un maximum local en a ;

Remarque 13
- Si l'une au moins des deux valeurs propres est nulle ($\det(H_f(a)) = 0$), alors il faut faire une étude plus complète de f.

6 Fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$

Les applications considérées dans cette section sont définies sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, avec $1 \leq p \leq 3$ et $1 \leq n \leq 3$.
On notera $\mathcal{F}(U, \mathbb{R}^n)$ l'ensemble de ces fonctions.

Remarque 14
- $\mathcal{F}(U, \mathbb{R}^n)$ muni des lois usuelles est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

On utilisera la norme euclidienne sur l'espace de départ et sur celui d'arrivée.

6.1 Limites et continuité

Définition 16
Soit $f \in \mathcal{F}(U, \mathbb{R}^n)$.
- On dit que f *admet une limite* l en $a \in \overline{U}$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0 / \forall x \in U, (\|x - a\| < r \Rightarrow \|f(x) - l\| < \varepsilon)$$

- On dit que f est *continue sur* $D \subset U$ si f admet une limite en tout point de D.
- On dit que f est *continue* si f est continue sur U.

Définition 17
Soit $f \in \mathcal{F}(U, \mathbb{R}^n)$. On note $f : x = (x_1, \ldots, x_p) \mapsto f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$.
Les applications $f_1, \ldots, f_n$, qui sont définies sur U à valeurs dans $\mathbb{R}$, sont appelées *applications coordonnées* de la fonction f.

Théorème 9
Soient $f \in \mathcal{F}(U, \mathbb{R}^n)$ et $a \in \overline{U}$.
La fonction f admet une limite en a (resp. est continue sur $D \subset U$) si, et seulement si toutes ses fonctions coordonnées f_i admettent une limite en a (resp. sont continues sur $D \subset U$).

Remarque 15
- On pourra ainsi utiliser tous les résultats sur la continuité pour les applications de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ établis précédemment.

6.2 Dérivées partielles

Définition 18
On dit que $f \in \mathcal{F}(U, \mathbb{R}^n)$ admet une *dérivée partielle (première) par rapport à la i-ème variable* en $a \in U$ si pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, l'application coordonnée f_k de f admet une dérivée partielle en a.
On note alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(a), \frac{\partial f_2}{\partial x_i}(a), \cdots, \frac{\partial f_n}{\partial x_i}(a) \right).$$

On dit que $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ est la *i-ème dérivée partielle (d'ordre 1)* de f en a ou encore la *dérivée partielle (d'ordre 1) par rapport à la variable x_i*.

Remarque 16
- Si $f \in \mathcal{F}(U, \mathbb{R}^n)$ admet un i-ème dérivée partielle en $a = (a_1, ..., a_p) \in U$ alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1, ..., a_i + t, ..., a_p) - f(a_1, ..., a_i, ..., a_p)}{t}$$

Attention !
Comme pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, l'existence de dérivées partielles en a n'implique pas la continuité en a.

Définition 19
Soit $f \in \mathcal{F}(U, \mathbb{R}^n)$. Si elle existe, on appelle encore *i-ème dérivée partielle* de f la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ définie sur U par $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} : a \in U \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) \in \mathbb{R}^n$

Définition 20
On dit que $f \in \mathcal{F}(U, \mathbb{R}^n)$ est de *classe* $\mathcal{C}^1$ sur U si f admet p dérivées partielles continues sur U, c'est à dire si : $\forall i \in [\![1, p]\!]$, l'application partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ est définie et continue sur U.

Notation
L'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur U ouvert de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ est noté $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^n)$.

Proposition 12
f est classe $\mathcal{C}^1$ si, et seulement si pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, l'application coordonnée f_k de f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Définition 21
Soient $f \in \mathcal{F}(U, \mathbb{R}^n)$ et $a \in U$.

- On dit que l'application f possède des *dérivées partielles d'ordre 2* en a si, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, l'application coordonnée f_k de f admet des dérivées partielles d'ordre 2 en a. On note alors :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_i \partial x_j}(a), \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_i \partial x_j}(a), \cdots, \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right).$$

  la i-ème dérivée partielle de la j-ème dérivée partielle en a.

- Si, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, l'application coordonnée f_k de f est de classe C^2, alors on dit que f est classe C^2.

Remarque 17

- On en déduit que l'on conserve toutes les propriétés (linéarité, ...) que l'on avait pour les applications à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Théorème 10
On considère les applications suivantes :

- $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, ouvert de $\mathbb{R}^2$.

- f et g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur V, ouvert de $\mathbb{R}^2$ tel que : $\forall (x, y) \in V$, $(f(x, y), g(x, y)) \in U$.

Alors l'application $F : \left| \begin{array}{ccc} V & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & h(f(x, y), g(x, y)) \end{array} \right.$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur V et :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial y}$$

Exemple 2 Passage en coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^2$:

Soit $u : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (\rho, \theta) & \mapsto & (\rho \cos\theta, \rho \sin\theta) \end{array} \right.$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Soit la fonction $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, et $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $F(\rho, \theta) = h \circ u(\rho, \theta)$.
Alors si h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, et on a :

$$\frac{\partial F}{\partial \rho}(\rho, \theta) = \cos\theta \frac{\partial h}{\partial x}(u(\rho, \theta)) + \sin\theta \frac{\partial h}{\partial y}(u(\rho, \theta))$$

$$\frac{\partial F}{\partial \theta}(\rho, \theta) = -\rho \sin\theta \frac{\partial h}{\partial x}(u(\rho, \theta)) + \rho \cos\theta \frac{\partial h}{\partial y}(u(\rho, \theta))$$

Application :
Dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique $(\vec{i}, \vec{j})$, pour $\theta \in \mathbb{R}$, on définit la base $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$, dite *comobile*, par $\overrightarrow{u_r} = \cos\theta\, \vec{i} + \sin\theta\, \vec{j}$ et $\overrightarrow{u_\theta} = -\sin\theta\, \vec{i} + \cos\theta\, \vec{j}$.
La matrice de passage est la matrice de la rotation d'angle θ.
Pour $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, on a $\nabla h = \frac{\partial h}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial h}{\partial y}\vec{j}$.
En notant toujours h l'application $h \circ u$, la formule de changement de base donne :

$$\nabla h = \left(\cos\theta \frac{\partial h}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial h}{\partial y} \right) \overrightarrow{u_r} + \left(-\sin\theta \frac{\partial h}{\partial x} + \cos\theta \frac{\partial h}{\partial y} \right) \overrightarrow{u_\theta} = \frac{\partial h}{\partial r}\overrightarrow{u_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial \theta}\overrightarrow{u_\theta}$$

7 Équations aux dérivées partielles

Définition 22
On appelle *équation aux dérivées partielles* ou E.D.P. toute équation faisant intervenir les dérivées partielles d'une fonction inconnue f.

7.1 Équation aux dérivées partielles du premier ordre

Théorème 11 Équation simple
Les solutions de classe $\mathcal{C}^1$ sur U (ouvert de $\mathbb{R}^2$) de l'équation :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = g(x, y),$$

avec g continue sur U sont de la forme :

$$f(x, y) = \int g(x, y)dx + K(y) \qquad \text{où :}$$

- $\displaystyle\int g(x, y)dx$ est une primitive quelconque de g par rapport à x ;
- K est une application quelconque de classe $\mathcal{C}^1$ sur la projection de U sur (Oy).

Remarque 18
- Il arrive que l'on ait besoin de faire un changement de variables pour se ramener à cette forme.

Méthode d'étude de systèmes différentiels d'équations aux dérivées partielles

On étudie ici, sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$, les systèmes différentiels d'équations aux dérivées partielles de la forme :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = g(x, y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = h(x, y) \end{cases}$$

Méthode :
$\hookrightarrow$ On intègre la première équation, ce qui donne une fonction inconnue $K(y)$.
$\hookrightarrow$ On dérive ensuite par rapport à y l'expression de f obtenue.
$\hookrightarrow$ Pour finir, on introduit le résultat obtenu dans la deuxième équation, ce qui donne une expression de $K'(y)$ qu'on intègre.

Remarque 19
- On vérifie d'abord que les dérivées partielles croisées sont égales, en dérivant la première équation par rapport à x et la seconde par rapport à y.
  Si ce n'est pas le cas, il y a peu de chances qu'il y ait des solutions puisque f ne peut être de classe C^2.
- Si c'est plus simple, on peut inverser l'ordre des deux équations.
- En aucun cas, on n'intègre les deux équations séparément, car on obtient alors deux expressions différentes de f dont on ne sait pas quoi faire...

7.2 Équation aux dérivées partielles du second ordre

Théorème 12
Les solutions de classe $\mathcal{C}^2$ sur U (ouvert de $\mathbb{R}^2$), de l'équation :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 0$$

sont de la forme :

$$f(x,y) = xK(y) + L(y)$$

où K et L sont des applications quelconques de classe $\mathcal{C}^2$ sur la projection de U sur (Oy).

Théorème 13
Les solutions de classe $\mathcal{C}^2$ sur U (ouvert de $\mathbb{R}^2$), de l'équation :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0$$

sont de la forme :

$$f(x,y) = K(x) + L(y)$$

où K et L sont des applications quelconques de classe $\mathcal{C}^2$ sur la projection de U sur (Ox) et (Oy) respectivement.

Remarque 20
- Comme pour les équations aux dérivées partielles du premier ordre, il arrive que l'on ait besoin d'un changement de variable pour obtenir une équation de l'une des formes précédentes.