AN 5 - Fonctions vectorielles

Dans tout le chapitre $E = \mathbb{R}^p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$; il est muni du produit scalaire usuel.
D désigne une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1 Notions de topologie

1.1 Norme euclidienne

Définition 1
On appelle *norme euclidienne* sur E l'application $\|\cdot\|$ définie sur E par :

$$\forall x = (x_1, ..., x_p) \in E, \|x\| = \sqrt{(x|x)} = \sqrt{\sum_{k=1}^{p} x_k^2}$$

Remarque 1
- Pour $p = 1$, la norme coïncide avec la valeur absolue.

Définition 2
La *distance euclidienne* associée au produit scalaire est définie sur E^2 par :

$$\forall (x, y) \in E^2, \mathrm{d}(x, y) = \|x - y\|$$

Proposition 1
L'application $x \mapsto \|x\|$ définie sur E vérifie :

1. $\forall x \in E, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (*axiome de séparation*) ;

2. $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E, \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ (*axiome d'homogénéité*) ;

3. $\forall (x, y) \in E^2, |\ \|x\| - \|y\|\ | \leq \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (*inégalité triangulaire*).

Définition 3
On dit que A est une *partie bornée* de E s'il existe un réel $M \geq 0$ tel que $\forall x \in A, \|x\| \leq M$.

1.2 Ouverts - Fermés

Soient $a \in E$ et $r \in]0; +\infty[$.
- L'ensemble $B(a, r) = \{x \in E / \mathrm{d}(x, a) < r\}$ est appelée *boule ouverte de centre a et de rayon r*.
- L'ensemble $\overline{B}(a, r) = \{x \in E / \mathrm{d}(x, a) \leq r\}$ est appelée *boule fermée de centre a et de rayon r*.

Définition 4
$\forall a \in E$, on appelle *voisinage* de a, tout sous-ensemble de E qui contient une boule ouverte de centre a et de rayon non nul, c'est-à-dire :

$$V(a) \text{ est un voisinage de } a \Leftrightarrow \exists r \in]0; +\infty[, B(a, r) \subset V(a)$$

Proposition 2
$\forall (a, r) \in E \times]0; +\infty[$, la boule ouverte $B(a, r)$ est un voisinage de tous ses éléments.

Définition 5
- Un sous-ensemble O de E est dit *ouvert* s'il est vide, ou s'il est voisinage de chacun de ses points, c'est à dire :

$$O \text{ est un ouvert de } E \Leftrightarrow (O = \varnothing) \vee (\forall a \in O, \exists r \in]0; +\infty[, B(a,r) \subset O)$$

- Un sous-ensemble F de E est dit *fermé* si son complémentaire dans E (c'est-à-dire l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans F) est un ouvert de E.

Remarque 2
- E et $\varnothing$ sont des ouverts et des fermés de E.
- $\forall (a,r) \in E \times]0; +\infty[$, la boule ouverte $B(a,r)$ est un ouvert de E.

Proposition 3
- La réunion quelconque d'ensembles ouverts de E est un ouvert de E.
- L'intersection **finie** d'ouverts de E est un ouvert de E.
- La réunion **finie** de fermés de E est un fermé de E.
- L'intersection quelconque de fermés de E est un fermé de E.

Définition 6
Soit A une partie de E.
- On dit que a est un *point intérieur* à A si $\exists r > 0, B(a,r) \subset A$.
  L'ensemble des points intérieurs à A est appelé *intérieur* de A ; on le note $\overset{\circ}{A}$.
- On dit que a est un *point adhérent* à A si $\forall r > 0, B(a,r) \cap A \neq \varnothing$.
  L'ensemble des points adhérents à A est appelé *adhérence* de A ; on le note $\overline{A}$.
- On dit que a est un *point extérieur* à A si $\exists r > 0, B(a,r) \cap A = \varnothing$.
- On dit que a est un *point de la frontière* de A si a est un point adhérent à A, qui n'est pas intérieur à A. L'ensemble des points de la frontière de A est appelé *frontière* de A ; on le note $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$.

Proposition 4
Soient A de B deux parties non vides de E.
- Si $A \subset B$, alors $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$ et $\overline{A} \subset \overline{B}$.
- A ouvert $\Leftrightarrow A = \overset{\circ}{A}$; $\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A.
- A fermé $\Leftrightarrow A = \overline{A}$; $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A.
- $\complement_E \left(\overline{A}\right) = \overset{\circ}{\overbrace{\complement_E A}}$ et $\overline{\complement_E A} = \complement_E \left(\overset{\circ}{A}\right)$.

2 Limites

2.1 Limites de suites de E

Théorème-Définition 1
On dit qu'une suite (u_n) de E est *convergente* si :

$$\exists l \in E / \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, (n > N \Rightarrow \|u_n - l\| < \varepsilon)$$

S'il existe, un tel élément l est unique. On l'appelle *limite* de la suite (u_n). On le note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.
Pour indiquer que la suite (u_n) est convergente de limite l on écrit : $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l$.

Remarque 3
- Toute suite convergente est bornée (c'est-à-dire $\exists M \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}, \|u_n\| \leq M$).

Proposition 5

- $a \in \overline{A} \Leftrightarrow \exists (u_n) \in A^{\mathbb{N}} / \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$.
- $A \subset E$ est un fermé de E si, et seulement si toute suite convergente de A converge dans A.

Proposition 6
L'ensemble des suites convergentes de E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites de E. Sur ce sous-espace vectoriel, l'application $(u_n) \mapsto \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ est linéaire, c'est-à-dire :
si (u_n) et (v_n) sont deux suites convergentes de E, alors

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \lim_{n \to +\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \lim_{n \to +\infty} u_n + \mu \lim_{n \to +\infty} v_n$$

2.2 Limite d'une fonction vectorielle

Définition 7
Une *fonction vectorielle* est une application d'une partie D de $\mathbb{R}$ vers l'espace vectoriel $\mathbb{R}^p$.

$$f : D \to \mathbb{R}^p, t \longmapsto (f_1(t), ..., f_p(t))$$

Les fonctions réelles $f_i : D \to \mathbb{R}$ sont appelée *fonctions coordonnées* de f.
L'ensemble des fonctions vectorielles de D dans $\mathbb{R}^p$ est noté $\mathcal{F}(D, \mathbb{R}^p)$.

Proposition 7
$\mathcal{F}(D, \mathbb{R}^p)$ muni des lois usuelles est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Définition 8
Soient $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^p)$, et a un point adhérent à D ($a \in \overline{D}$).
On dit que f *admet une limite* $l \in \mathbb{R}^p$ en a si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0 / \forall t \in D, (|t - a| < r \Rightarrow \|f(t) - l\| < \varepsilon)$$

Proposition 8
Soient $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^p)$, et $a \in \overline{D}$. Si f admet une limite en a, alors elle est unique.
On la note $\lim\limits_{t \to a} f(t)$ ou $\lim\limits_{a} f$.

Théorème 1
Soient $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^p)$, et $a \in \overline{D}$. On note $f = (f_1, ..., f_p)$.
f admet une limite en a si, et seulement si, $\forall i \in [\![1, p]\!], f_i$ admet une limite en a, et dans ce cas :

$$\lim_a f = (\lim_a f_1, ..., \lim_a f_p)$$

.

Théorème 2 Caractérisation séquentielle de la limite
Soient $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^p)$, et $a \in \overline{D}$.

$$(\lim_a f = l) \Leftrightarrow \left(\forall (x_n) \in D^{\mathbb{N}}, \lim_{n \to +\infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = l \right)$$

Définition 9
Soit f une application définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ non majoré (resp. non minoré) à valeurs dans E. On dit que f *admet une limite* $l \in \mathbb{R}^p$ en $+\infty$ (resp. $-\infty$) si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R} / \forall t \in I, (t > M \text{ (resp. } t < M) \Rightarrow \|f(t) - l\| < \varepsilon)$$

Proposition 9
Soit $a \in \overline{D}$. Le sous-ensemble des fonctions vectorielles de $\mathcal{F}(D, \mathbb{R}^p)$ admettant une limite en a est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(D, \mathbb{R}^p)$.
Sur ce sev, l'application $f \mapsto \lim\limits_a f$ est linéaire, c'est-à-dire :
si f et g sont deux fonctions vectorielles définies sur D admettant une limite en a, alors

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \lim_a (\lambda f + \mu g) = \lambda \lim_a f + \mu \lim_a g$$

Proposition 10
Soient $a \in \overline{D}$, f et g deux fonctions de $\mathcal{F}(D, \mathbb{R}^p)$ admettant une limite en a. Alors :

- la fonction norme $\|f\| : t \mapsto \|f(t)\|$ admet une limite en a et

$$\lim_a \|f\| = \|\lim_a f\|$$

- la fonction produit scalaire $(f|g) : t \mapsto (f(t)|g(t))$ admet une limite en a et

$$\lim_a (f|g) = (\lim_a f | \lim_a g)$$

- la fonction produit vectoriel $f \wedge g : t \mapsto f(t) \wedge g(t)$ admet une limite en a et

$$\lim_a (f \wedge g) = \lim_a f \wedge \lim_a g$$

2.3 Continuité

Dans la suite du chapitre, $a \in D$, et f est une fonction vectorielle de $\mathcal{F}(D, \mathbb{R}^p)$.

Définition 10

- On dit que f est *continue* en a si f admet une limite en a.
- On dit que f est *continue sur* $I \subset D$ si f est continue en tout point de I.
- On dit que f est *continue*, si f est continue sur D.

Remarque 4

- Si f est continue en a, alors $\lim\limits_a f = f(a)$.

Théorème 3
On note $f = (f_1, ..., f_p)$.
f est continue en a (resp. sur $I \subset D$) si, et seulement si $\forall i \in [\![1, p]\!], f_i$ est continue en a (resp. sur I).

Proposition 11 Caractérisation séquentielle de la continuité
f est continue en a si, et seulement si l'image par f de toute suite d'éléments de D convergeant vers a converge vers $f(a)$.

Proposition 12
Soient f et g deux fonctions de $\mathcal{F}(D, \mathbb{R}^p)$ continues en a, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors $\lambda f + \mu g$ est continue en a.

Notation
Les applications continues sur D à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ sont notées $\mathcal{C}(D, \mathbb{R}^p)$ (ou $\mathcal{C}^0(D, \mathbb{R}^p)$).

Proposition 13
$\mathcal{C}(D, \mathbb{R}^p)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(D, \mathbb{R}^p)$.

3 Dérivabilité

Dans ce paragraphe, D désigne un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in D$, $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^p)$

3.1 Dérivée en un point

Définition 11
On dit que f est *dérivable* en a, si l'application $t \mapsto \dfrac{f(t)-f(a)}{t-a}$ définie sur $D \setminus \{a\}$, appelée *taux d'accroissement* de f en a, admet une limite en a.
Dans ce cas, cette limite est appelée *vecteur dérivé* de f en a, ou plus simplement *dérivée* de f en a.
On la note : $f'(a), \mathrm{D}f(a)$ ou $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(a)$.
On écrit aussi :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Définition 12
On dit que f est *dérivable à droite* (resp. *dérivable à gauche*) de $a \in D$ si $I_a^+ = D \cap [a; +\infty[$ (resp. $I_a^- = D \cap]-\infty, a]$) n'est pas réduit à un point, et si la restriction de f à I_a^+ (resp. I_a^-) admet une dérivée en a.
Dans ce cas, une telle dérivée s'appelle *dérivée à droite* (resp. *dérivée à gauche*) de f en a ; elle est notée $f'_d(a)$ (resp. $f'_g(a)$).

Proposition 14
Toute fonction dérivable en a est continue en a.

Attention !
La réciproque est fausse.

3.2 Fonction dérivée

Définition 13
On dit que f est *dérivable* sur D, si f est dérivable en tout point de D.
On définit alors la *fonction dérivée* de f sur D, noté f' ou $\mathrm{D}f$, par :

$$f' : t \mapsto f'(t)$$

Notation
L'ensemble des applications dérivables sur D à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ est noté $\mathcal{D}(D, \mathbb{R}^p)$.

Proposition 15
$\mathcal{D}(D, \mathbb{R}^p)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(D, \mathbb{R}^p)$.
De plus l'application définie sur $\mathcal{D}(D, \mathbb{R}^p)$ à valeurs dans $\mathcal{F}(D, \mathbb{R}^p)$ par $f \mapsto f'$ est linéaire, c'est-à-dire : si f et g sont deux fonctions dérivables sur D,alors :

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, (\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$$

Définition 14
Toute fonction dérivable sur D dont la dérivée est continue sur D est dite de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.

Notation
L'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur D est noté $\mathcal{C}^1(D, \mathbb{R}^p)$.

Proposition 16
$\mathcal{C}^1(D, \mathbb{R}^p)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(D, \mathbb{R}^p)$.

Théorème 4
On note $f = (f_1, ..., f_p)$. f est dérivable (resp. de classe $\mathcal{C}^1$) sur D si, et seulement si $\forall i \in [\![1, p]\!], f_i$ est dérivable (resp. de classe $\mathcal{C}^1$) sur D, et dans ce cas :

$$\forall t \in D, f'(t) = (f_1'(t), ..., f_p'(t))$$

Remarque 5 Interprétation cinématique
On se place dans le cas où $p \in \{2, 3\}$.
On utilise souvent t comme paramètre, car celui-ci représente habituellement le temps.

- $f(t)$ s'interprète comme la position à l'instant t d'un point mobile $M(t)$ (du plan si $p = 2$, de l'espace si $p = 3$), définie par : $\overrightarrow{OM} = f(t)$.
- Si f est dérivable, $f'(t)$ s'interprète alors comme le *vecteur vitesse* de ce mobile à l'instant t.
- Si f' est elle-même dérivable, $f''(t)$ s'interprète quant à elle comme le *vecteur accélération* du mobile à l'instant t.

3.3 Dérivées de fonctions particulières

Dans cette section, f et g désignent deux fonctions vectorielles dérivables sur D.

Théorème 5 Dérivation d'un produit scalaire
La fonction produit scalaire $(f|g) : t \mapsto (f(t)|g(t))$ est dérivable sur D et :

$$\forall t \in D, (f|g)'(t) = \big(f'(t)|g(t)\big) + \big(f(t)|g'(t)\big)$$

Théorème 6 Dérivation d'un produit vectoriel
La fonction produit vectoriel $f \wedge g : t \mapsto f(t) \wedge g(t)$ est dérivable sur D et :

$$\forall t \in D, (f \wedge g)'(t) = f'(t) \wedge g(t) + f(t) \wedge g'(t)$$

Théorème 7 Dérivation d'un déterminant

- En dimension 2 :
  Si u et v sont des fonctions vectorielles dérivables sur D à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, alors l'application Δ définie sur D par $\Delta(t) = \det(u(t), v(t))$ est dérivable sur D et :

$$\Delta'(t) = \det(u'(t), v(t)) + \det(u(t), v'(t))$$

- En dimension 3 :
  Si u, v et w sont des fonctions vectorielles dérivables sur D à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, alors l'application Δ définie sur D par $\Delta(t) = \det(u(t), v(t), w(t))$ est dérivable sur D et :

$$\Delta'(t) = \det(u'(t), v(t), w(t)) + \det(u(t), v'(t), w(t)) + \det(u(t), v(t), w'(t))$$

Théorème 8 Composée d'applications dérivables
Soient I un intervalle réel, $f : D \to \mathbb{R}^p$ et $\varphi : I \to D$ deux fonctions dérivables. Alors la fonction $f \circ \varphi$ est dérivable sur I et on a :, $\forall a \in I$:

$$(f \circ \varphi)'(a) = \varphi'(a).f'(\varphi(a))$$

3.4 Dérivées successives

Définition 15
Soient $k \in \mathbb{N}^*$, et $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^p)$; les *dérivées successives* de f sont définie par récurrence :
on pose $f^{(0)} = f$, f est k *fois dérivable* si $f^{(k-1)}$ est dérivable ; on appelle *dérivée k-ème* ou *dérivée d'ordre k*, la dérivée de $f^{(k-1)}$ que l'on note $f^{(k)}$ (ou $\mathrm{D}^k(f)$).

Notation
L'ensemble des fonctions k fois dérivables sur D à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ se note $\mathcal{D}^k(D, \mathbb{R}^p)$.

Proposition 17
L'ensemble $\mathcal{D}^k(D, \mathbb{R}^p)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(D, \mathbb{R}^p)$.
De plus l'application définie sur $\mathcal{D}^k(D, \mathbb{R}^p)$ à valeurs dans $\mathcal{F}(D, \mathbb{R}^p)$ par $f \mapsto f^{(k)}$ est linéaire, c'est-à-dire :
si f et g sont deux fonctions k fois dérivables sur D,alors :

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, (\lambda f + \mu g)^{(k)} = \lambda f^{(k)} + \mu g^{(k)}$$

Définition 16
- Une fonction vectorielle k fois dérivable sur D est dite *de classe* $\mathcal{C}^k$ si sa dérivée d'ordre k est continue.
- Une fonction vectorielle est dite *de classe* $\mathcal{C}^\infty$ si elle est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Notation
L'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k (k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\})$ se note $\mathcal{C}^k(D, \mathbb{R}^p)$.

Proposition 18
L'ensemble $\mathcal{C}^k(D, \mathbb{R}^p)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(D, \mathbb{R}^p)$.

Théorème-Définition 2 Formule de Taylor Young
Soient $f \in \mathcal{C}^k(D, \mathbb{R}^p)$ $(k \in \mathbb{N})$, alors pour tout réel h tel que $a + h \in D$:

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a) + ... + \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + h^k \varepsilon(h)$$

où ε est une fonction vectorielle définie sur D qui vérifie $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$.
Cette expression s'appelle *développement limité de f d'ordre k au voisinage de a.*

Théorème 9 Formule de Leibniz
Soient $f : D \to \mathbb{R}^p$ et $\lambda : D \to \mathbb{R}$ une fonction vectorielle et une fonction réelle (également appelée *fonction scalaire*) toutes deux de classe $\mathcal{C}^k$ $(k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\})$ sur D. Alors, la fonction $t \mapsto \lambda(t) f(t)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur D et :

$$\forall t \in D, (\lambda f)^{(k)}(t) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \lambda^{(i)}(t) f^{(k-i)}(t)$$