AN 3 - Séries entières

Dans ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Convergence d'une série entière

1.1 Rayon de convergence

Définition 1
Soit (a_n) une suite d'éléments de $\mathbb{K}$. On appelle *série entière* de la variable $z \in \mathbb{K}$ à coefficients a_n la série $\sum a_n z^n$.
Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$), on dit *série entière réelle* (resp. *complexe*).

Proposition 1
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. L'ensemble $I = \left\{ r \in \mathbb{R}^+ / \text{ la suite } (|a_n| r^n) \text{ est bornée} \right\}$ est un intervalle non vide de $\mathbb{R}^+$.

Définition 2
On appelle **rayon de convergence** de la série entière $\sum a_n z^n$ le nombre R_a de $\overline{\mathbb{R}}$ défini par : $R_a = \sup I$.

Remarque 1
- On ne change pas le rayon de convergence d'une série entière en modifiant un nombre fini de coefficients a_n.
- les séries entières $\sum a_n z^n, \sum \lambda a_n z^n$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$, et $\sum |a_n| z^n$ ont le même rayon de convergence.

Théorème 1
Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons respectifs R_a et R_b. Alors :
- $(\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |a_n| \leq |b_n|) \Rightarrow (R_a \geq R_b)$.
- $(|a_n| \sim |b_n|) \Rightarrow (R_a = R_b)$.

1.2 Disque de convergence

Définition 3
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière complexe de rayon de convergence $R_a > 0$. On appelle *disque ouvert de convergence* le disque ouvert de centre O et de rayon R_a : $\mathcal{D}(O, R_a) = \{z \in \mathbb{C} / |z| < R_a\}$.
Si la série est réelle, on appelle *intervalle ouvert de convergence* l'intervalle $]-R_a, R_a[$.

Théorème 2 Lemme d'Abel
Si pour $z_0 \in \mathbb{C}^*$ la suite $(a_n z_0^n)_n$ est bornée, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$ la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

Théorème 3
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R_a. Alors :
- $|z| < R_a \Rightarrow \sum a_n z^n$ converge absolument.
- $|z| > R_a \Rightarrow \sum a_n z^n$ diverge grossièrement.

Remarque 2
- Si $|z| = R_a$, on ne peut pas conclure.

Proposition 2 Règle de d'Alembert
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R_a, telle que $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ existe et vaut $L \in \overline{\mathbb{R}}$ on a :
$\hookrightarrow$ si $L = 0$, alors $R_a = +\infty$;
$\hookrightarrow$ si $L = +\infty$, alors $R_a = 0$;
$\hookrightarrow$ si $L \neq 0$ et $L \neq +\infty$, alors $R_a = \dfrac{1}{L}$.

1.3 Opérations sur les séries entières

Dans ce paragraphe on considère $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.

Théorème 4
Le rayon de convergence R_s de la série entière somme $\sum (a_n + b_n) z^n$ vérifie $R_s \geq \min(R_a, R_b)$, avec égalité si $R_a \neq R_b$.
De plus, si $|z| < \min(R_a, R_b)$, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$.

Théorème 5
- Le produit de Cauchy des séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ est une série entière, de la forme $\sum c_n z^n$ où $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$
- Le rayon de convergence R_p de cette série entière vérifie $R_p \geq \min(R_a, R_b)$.
  De plus, si $|z| < \min(R_a, R_b)$, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right)$.

2 Propriétés de la somme d'une série entière d'une variable réelle

2.1 Continuité

Définition 4
On appelle *somme* de la série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence R_a la fonction définie sur le disque ouvert de convergence $D(O, R_a)$ par :

$$z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

Proposition 3
La somme d'une série entière est continue sur le disque ouvert de convergence.

Remarque 3
- La continuité sur le cercle de centre O de rayon R_a n'est pas acquise (il peut y avoir continuité en tous points du cercle, en certains points du cercle ou en aucun).

2.2 Dérivabilité

Théorème 6
Soit $\sum a_n x^n$ une série entière **réelle**, de rayon de convergence R et de somme f.

Alors f est dérivable sur $]-R, R[$, et pour tout x de $]-R, R[$, $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$.

Cette série dérivée a le même rayon de convergence R.

Corollaire
La somme d'une série entière réelle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son intervalle ouvert de convergence.

Remarque 4

- La série dérivée p-ème vérifie : $\forall x \in]-R; R[$, $f^p(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+p)!}{n!} a_{n+p} x^n$
- On a en particulier : $\forall p \in \mathbb{N}, a_p = \frac{f^p(0)}{p!}$.

2.3 Intégration

Théorème 7
On considère la série entière **réelle** $\sum a_k x^k$ de rayon de convergence R et de somme f.
La série $\sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ a le même rayon de convergence R et a pour somme $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.

3 Fonction développable en série entière

3.1 Généralités

Définition 5
Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est dite *développable en série entière en 0* s'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence R non nul, et $r \in]0, R]$ tels que : $\forall x \in]-r, r[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

On dit que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est le *développement en série entière de f au voisinage de 0* (que l'on notera DSE).

Théorème 8
Soient f et g deux fonctions de la variable réelle admettant respectivement sur $]-r, r[$ les DSE $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$. Si $\forall x \in]-r, r[, f(x) = g(x)$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = b_n$.

Remarque 5

- On déduit du théorème précédent l'**unicité du développement en série entière** :
  Si une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ admet un DSE au voisinage de 0, celui-ci est unique, c'est-à-dire qu'il existe une unique série entière dont la somme coïncide avec f au voisinage de 0.

- Soient f et g deux fonctions de la variable réelle développables en série entière au voisinage de 0, admettant respectivement les DSE : $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$; alors $\forall \lambda \in \mathbb{R}, f + \lambda g$ est développable en série entière au voisinage de 0, et admet pour DSE : $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + \lambda b_n) x^n$.

Corollaire

La somme f d'une série entière définie par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est paire (resp. impaire) si, et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, a_{2n+1} = 0$ (resp. $a_{2n} = 0$).

Définition 6

Soient I un intervalle contenant 0, et $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction de la variable réelle de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I. La *série de Taylor* de f est la série entière $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Proposition 4

Soient $r > 0$ et f une fonction admettant sur $]-r, r[$ le DSE $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Alors la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r, r[$ et elle coïncide avec la somme de sa série de Taylor, c'est-à-dire que $\forall x \in]-r, r[$ on a :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Remarque 6

- On rappelle le théorème de Taylor avec reste intégral :
  Si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un voisinage I de 0, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x)$$

  où $R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \mathrm{d}t$ est le reste intégral de Taylor d'ordre n.
  Ainsi, une fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle I contenant 0 admet un DSE sur $]-r, r[$ $(r > 0)$, si, et seulement si $\lim_{n \to +\infty} R_n(x) = 0$, et alors f coïncide avec la somme de sa série de Taylor.

3.2 Développements usuels

3.2.1 Par la formule de Taylor

Proposition 5

La fonction exponentielle admet un DSE sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Corollaire

Les fonctions ch et sh sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{ch}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{sh}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Proposition 6

Les fonctions cos et sin sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \cos(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \qquad \text{et} \qquad \sin(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

3.2.2 Par intégration ou dérivation terme à terme

On rappelle le résultat fondamental suivant :

Proposition 7
La série entière de la variable réelle $\sum x^n$ a pour rayon de convergence 1, et sa somme est donnée par :

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

Corollaire
Les séries entières de la variable réelle $\sum (-1)^n x^n$ et $\sum (-1)^n x^{2n}$ ont pour rayon de convergence 1, et leurs sommes sont données par :

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x} \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}$$

Proposition 8
La fonction $x \longmapsto \ln(1+x)$ admet un DSE sur $]-1,1[$, et on a :

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$$

Proposition 9
La fonction $x \longmapsto \mathrm{Arctan}(x)$ admet un DSE sur $]-1,1[$, et on a :

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \mathrm{Arctan}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

3.2.3 Par une équation différentielle

Pour montrer qu'une fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ est développable en série entière sur un intervalle I contenant 0, on peut raisonner par analyse/synthèse comme suit :

↪ On montre que f est solution sur un intervalle ouvert J contenant 0 d'une équation différentielle linéaire d'ordre $p \in \mathbb{N}^*$ de la forme :

$$(E): \qquad P_p(t) y^{(p)}(t) + P_{p-1}(t) y^{(p-1)}(t) + ... + P_1(t) y'(t) + P_0(t) y(t) = S(t)$$

où $\forall k \in [\![0,p]\!], P_k$ est une fonction polynômiale et S est une fonction développable en série entière sur J, de développement connu.

↪ On suppose que f admet un DSE sur un intervalle $]-r,r[$ centré en 0, inclus dans J, et on écrit : $\forall x \in]-r,r[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

↪ On utilise alors le fait que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que $\forall x \in]-r,r[, \forall k \in [\![0,p]\!]$, $f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}$; on reporte ces expressions dans (E) pour obtenir une unique somme de série entière, nulle.

↪ On invoque l'unicité du DSE, et on identifie chaque coefficient à 0. Généralement cela conduit à des relations de récurrence sur les coefficients a_n, puis à des études de suites...

↪ On synthétise les résultats, en vérifiant que la série entière $\sum a_n x^n$ ainsi déterminée a un rayon de convergence non nul.

Proposition 10
La fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ admet un DSE sur $I = \mathbb{R}$ si $\alpha \in \mathbb{N}$, et sur $I =]-1, 1[$ sinon, et on a :

$$\forall x \in I, \qquad (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

3.3 Série géométrique et série exponentielle d'une variable complexe

Définition 7
La série entière de la variable complexe $\sum z^n$ est appelée *série géométrique de raison z* ; elle a pour rayon de convergence 1, et sa somme est donnée pour tout complexe z du disque ouvert de convergence par :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

Rappel
On a défini en première année la fonction exponentielle complexe par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \mathrm{e}^{x+iy} = \mathrm{e}^x(\cos(y) + i.\sin(y))$$

Proposition 11
La série entière de la variable complexe $\sum \frac{z^n}{n!}$ a pour rayon de convergence $+\infty$, et sa somme est e^z :

$$\mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Remarque 7

- La fonction exponentielle complexe est le prolongement sur $\mathbb{C}$ de la fonction exponentielle réelle, dont le développement en série entière coïncide avec la restriction de la série complexe à $\mathbb{R}$.

- La fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{C}$.

Proposition 12
$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2$ on a : $\mathrm{e}^z \mathrm{e}^{z'} = \mathrm{e}^{z+z'}$.