AN 2 - Compléments sur les séries numériques

Dans ce chapitre les suites considérées sont à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Séries absolument convergentes

Définition 1
On dit que la série $\sum u_n$ *converge absolument* si la série $\sum |u_n|$ converge.

Proposition 1
Une série $\sum u_n$ à valeurs complexes converge absolument si, et seulement si les deux séries $\sum \mathrm{Re}(u_n)$ et $\sum \mathrm{Im}(u_n)$ convergent absolument.

Théorème 1
Toute série absolument convergente est convergente, et on a la majoration :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \left|\sum_{k=n}^{+\infty} u_k\right| \leq \sum_{k=n}^{+\infty} |u_k|$$

2 Critères de convergence

2.1 Comparaison série-intégrale

Théorème 2
Soit f une fonction définie sur $[n_0, +\infty[$, $n_0 \in \mathbb{N}$, **positive**, localement intégrable et décroissante .
L'intégrale $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ et la série $\displaystyle\sum_{n \geq n_0} f(n)$ sont de même nature.

Proposition 2
Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ localement intégrable et décroissante sur $\mathbb{R}^+$ telle que $\sum f(n)$ soit convergente.
Pour $p \in \mathbb{N}$, on note S_p (resp. R_p) la somme partielle (resp. le reste) d'ordre p de la série de terme général $f(n)$. Alors :

- $\displaystyle\int_{p+1}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t \leq R_p \leq \int_{p}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$.
- En notant $\sigma_n = S_n + \displaystyle\int_{n+1}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$, on a σ_n est une valeur approchée de la somme S de la série qui vérifie : $0 \leq S - \sigma_n \leq \displaystyle\int_{n}^{n+1} f(t)\mathrm{d}t$.

2.2 Comparaison à une série positive

Proposition 3
Si v_n est le terme général **positif** d'une série convergente, et si $u_n = O(v_n)$, alors $\sum u_n$ converge absolument.

Remarque 1
Si v_n est le terme général positif d'une série convergente, on a également :
- $u_n = o(v_n) \Rightarrow \sum u_n$ absolument convergente ;
- $|u_n| \sim v_n \Rightarrow \sum u_n$ absolument convergente.

2.3 Critère de d'Alembert

Proposition 4
Soit u_n le terme général d'une série à termes non nuls, tels que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = L \in \mathbb{R}$$

Alors :
$\hookrightarrow$ $L < 1 \Rightarrow \sum u_n$ converge absolument ;
$\hookrightarrow$ $L > 1 \Rightarrow \sum u_n$ ne converge pas absolument ;

Remarque 2
- Si la série est à termes positifs, le cas $L > 1$ permet de conclure à sa divergence ; dans le cas contraire, on ne peut pas conclure.
- le cas $L = 1$ ne permet en aucun cas de conclure.

2.4 Produit de Cauchy

Définition 2
Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques. Leur *produit de Cauchy* est la série $\sum w_n$ de terme général :

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{p+q=n} u_p v_q$$

Proposition 5
Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent absolument, alors leur produit de Cauchy $\sum w_n$ converge absolument et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$$

3 Développement décimal d'un réel

Théorème-Définition 1
Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, il existe une unique suite d'entiers naturels (x_n) telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k=0}^{n} x_k 10^{-k} \leq x \leq \sum_{k=0}^{n} x_k 10^{-k} + 10^{-n}$$

avec de plus, la suite (x_n) à valeurs dans $[\![0, 9]\!]$ pour $n \geq 1$, et qui ne stationne pas sur 9.

- La suite (x_n) est appelée *développement décimal propre* de x.
- Les valeurs $\sum_{k=0}^{n} x_k 10^{-k}$ et $\sum_{k=0}^{n} x_k 10^{-k} + 10^{-n}$ sont les *approximations décimales* à l'ordre n de x *par défaut* et *par excès*.

Proposition 6
Soit $x \in \mathbb{R}^+$ de développement décimal (x_n). La série $\sum\limits_{n\geq 0} x_n 10^{-n}$ converge vers x.
Sa limite se note $x = x_0, x_1x_2x_3...$ que l'on appelle *écriture décimale illimitée* de x.

Remarque 3
- $x_0 = E(x)$, et $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n = E(10^n x) - 10.E(10^{n-1}x)$.
- Pour obtenir le développement décimal de $x \in \mathbb{R}^-$, on se ramène au développement de $-x$.
- La suite $(x_n)_{n\geq 1}$ s'appelle la *suite des décimales* de x.
- Il existe des développements décimaux impropres : ceux où l'on n'impose pas la condition de non stationnarité sur 9. Dans ce cas, il y a ambigüité sur la description par le développement décimal. Par exemple : 1 = 1,0000...=0,9999...

Définition 3
Les *nombres décimaux* sont les réels dont la suite des décimales stationne sur 0.

Proposition 7
Les nombres rationnels (définis comme les quotients d'entiers $\dfrac{p}{q}$ avec $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$) sont les nombres dont le développement décimal est périodique à partir d'un certain rang.