AN 1 - Intégrales généralisées

Dans ce chapitre I désigne l'un des intervalles : $[a,b[,]a,b]$ ou $]a,b[$ avec $(a,b) \in \left(\overline{\mathbb{R}}\right)^2, a<b$.
f désigne une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Intégrales généralisées

1.1 Convergence d'une intégrale sur I

Définition 1
On dit que f est *localement intégrable* sur I si pour tous les réels α et β de $]a,b[$, $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(t)\mathrm{d}t$ existe.

Remarque 1
- Si f est continue sur $]a,b[$, alors elle est localement intégrable sur I.

On suppose désormais que f est localement intégrable sur I.

Vocabulaire :
L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est dite *intégrale impropre* de f sur I.

Définition 2
- Pour $I=[a,b[$, $(a,b)\in\mathbb{R}\times\overline{\mathbb{R}}$, on dit que l'intégrale de f sur I est *convergente* si la fonction $x\mapsto\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ admet une limite finie quand x tend vers b par valeurs inférieures.
  Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale *diverge*.

- Pour $I=]a,b]$, $(a,b)\in\overline{\mathbb{R}}\times\mathbb{R}$, on dit que l'intégrale de f sur I est *convergente* si la fonction $x\mapsto\displaystyle\int_x^b f(t)\mathrm{d}t$ admet une limite finie quand x tend vers a par valeurs supérieures.
  Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale *diverge*.

Dans le cas de convergence, la limite s'appelle *intégrale généralisée* de f sur I, et se note $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ ou $\displaystyle\int_I f(t)\mathrm{d}t$.

- Pour $I=]a,b[$, $(a,b)\in\left(\overline{\mathbb{R}}\right)^2$, on dit que l'intégrale de f sur I est *convergente* s'il existe un réel $c\in]a,b[$, tel que $\displaystyle\int_a^c f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\mathrm{d}t$ convergent.
  En cas de convergence, on note encore $\displaystyle\int_I f(t)\mathrm{d}t=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=\int_a^c f(t)\mathrm{d}t+\int_c^b f(t)\mathrm{d}t$.

  Dans le cas contraire, on dit encore que l'intégrale *diverge*.

1.2 Intégrales de référence

Théorème 1

- $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

  $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si $\alpha > 0$.
- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si, et seulement si $\alpha > 1$.
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si, et seulement si $\alpha < 1$.

Vocabulaire :
Les deux dernières intégrales sont appelées *intégrales de Riemann.*

1.3 Propriétés

Proposition 1
Les intégrales généralisées vérifient la relation de Chasles.

Proposition 2
L'ensemble des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$), d'intégrale convergente sur un intervalle I, muni des lois usuelles est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (resp. $\mathbb{C}$-espace vectoriel).

Proposition 3

- **linéarité**
  Dans l'espace vectoriel des fonctions d'intégrale convergente sur I , $f \mapsto \displaystyle\int_I f(t)\mathrm{d}t$ est linéaire.
- **positivité**
  Si f est une fonction réelle d'intégrale convergente sur I, telle que : $f \geq 0$, alors $\displaystyle\int_I f(t)\mathrm{d}t \geq 0$.
- Si f est une fonction continue sur I telle que $\displaystyle\int_I |f(t)|\mathrm{d}t = 0$, alors f est identiquement nulle.
- **croissance**
  Si f et g sont deux fonctions réelles d'intégrale convergente sur I, telles que : $f \leq g$, alors $\displaystyle\int_I f(t)\mathrm{d}t \leq \int_I g(t)\mathrm{d}t$.

Proposition 4
Si f est à valeurs dans $\mathbb{C}$, d'intégrale convergente sur I, alors $\displaystyle\int_I \mathrm{Re}(f)(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_I \mathrm{Im}(f)(t)\mathrm{d}t$ convergent et on a :

$$\int_I f(t)\mathrm{d}t = \int_I \mathrm{Re}(f)(t)\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_I \mathrm{Im}(f)(t)\mathrm{d}t.$$

Pour ne pas alourdir la rédaction, on considère dans la suite du chapitre que $I = [a, b[$, $(a, b) \in \mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}$.

2 Critères de convergence

2.1 Critères pour les fonctions positives

Dans l'ensemble de ce paragraphe, f et g désignent des fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

Proposition 5
$\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge $\Leftrightarrow \exists M > 0, \forall x \in [a, b[, 0 \leq \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \leq M$

Théorème 2
Si $0 \leq f \leq g$ sur I, alors :

- Si $\displaystyle\int_a^b g$ est convergente, alors $\displaystyle\int_a^b f$ est convergente.
- Si $\displaystyle\int_a^b f$ est divergente, alors $\displaystyle\int_a^b g$ est divergente.

Remarque 2
- On peut remplacer l'hypothèse $0 \leq f \leq g$ sur I par $0 \leq f \leq g$ au voisinage de b.
- On peut énoncer des résultats analogues pour des fonctions négatives :

  Si $f \leq g \leq 0$ au voisinage de b,

  $\displaystyle\int_a^b f$ converge $\Rightarrow \displaystyle\int_a^b g$ converge ; $\displaystyle\int_a^b g$ diverge $\Rightarrow \displaystyle\int_a^b f$ diverge.

Théorème 3
Si $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ converge et si $f(t) \underset{t \to b}{=} O\left(g(t)\right)$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge.

Théorème 4
Si $f \underset{b}{\sim} g$, alors $\displaystyle\int_a^b f$ et $\displaystyle\int_a^b g$ sont de même nature.

2.2 Fonction intégrable sur un intervalle

Définition 3
f est dite *intégrable* sur I si $\displaystyle\int_I |f(t)|\mathrm{d}t$ est convergente.

Remarque 3
- L'intégrabilité sur I est équivalente à l'intégrabilité sur l'intérieur de I.

Proposition 6
Si f est intégrable sur I, alors $\displaystyle\int_I f(t)\mathrm{d}t$ est convergente et on a :

$$\left|\int_I f(t)\mathrm{d}t\right| \leq \int_I |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

2.3 Inégalité de Cauchy Schwarz

Théorème 5
Soient f et g des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, localement intégrables sur I.
Si $\displaystyle\int_I f^2$ et $\displaystyle\int_I g^2$ sont convergentes, alors $\displaystyle\int_I f.g$ est convergente, et :

$$\left(\int_I f.g\right)^2 \leq \int_I f^2 . \int_I g^2$$

3 Calculs

3.1 Utilisation de primitives

Proposition 7
Si f est continue sur $[a, b[$, alors elle admet une primitive F sur $[a, b[$.
$\displaystyle\int_a^b f$ converge si, et seulement si F admet une limite finie en b^- et alors :

$$\int_a^b f \mathrm{d}t = \lim_{x \to b^-} (F(x) - F(a))$$

3.2 Intégration par parties

Théorème 6
Soient f et g de classe C^1 sur I, localement intégrables sur I telles que $\lim\limits_{t \to b^-} f(t)g(t)$ existe et est finie.
Si l'une des deux intégrales $\displaystyle\int_a^b fg'$ ou $\displaystyle\int_a^b f'g$ est convergente, il en est de même pour l'autre et on a :

$$\int_a^b fg' = [fg]_a^b - \int_a^b f'g = \left(\lim_{t \to b^-} f(t)g(t) - f(a)g(a)\right) - \int_a^b f'g$$

3.3 Changement de variable

Théorème 7
Soient f continue sur I, et φ de classe C^1, strictement monotone sur un intervalle J d'extrémités α et β tel que $\varphi(J) = I$; alors les intégrales $\displaystyle\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\mathrm{d}u$ sont de même nature, et égales en cas de convergence.