AN 0 - REVISIONS

1 Calcul intégral

f et g sont des fonctions continues sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. a et b sont des réels de I.

☒ **Théorème fondamental d'intégration (TFI) :**
La fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

☒ **Propriétés**

- Relation de Chasles :
  Pour tout réel $c \in I$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t$.
- **Linéarité :**
  Pour tous réels λ et μ, $\displaystyle\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.
- **Positivité :**
  Si $f \geq 0$, alors $\displaystyle\int_I f(t)\mathrm{d}t \geq 0$.
- Si $\displaystyle\int_I |f(t)|\mathrm{d}t = 0$, alors f est identiquement nulle.
- **Croissance :**
  Si $f \leq g$, alors $\displaystyle\int_I f(t)\mathrm{d}t \leq \int_I g(t)\mathrm{d}t$.
- $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$.

☒ **Inégalité de Cauchy Schwarz :**

$$\left(\int_a^b fg\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right)$$

☒ **Théorème d'intégration par parties**
Si f et g de classe C^1 sur I, alors

$$\int_a^b fg' = [fg]_a^b - \int_a^b f'g$$

☒ **Théorème de changement de variable**
Soit φ de classe C^1, strictement monotone sur un intervalle J d'extrémités α et β tel que $\varphi(J) = I$; alors $\displaystyle\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\mathrm{d}u$.

☒ **Formule de Taylor avec reste intégral :**
Si f est de classe C^{n+1} sur I, alors :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

2 Séries numériques

(u_n) est une suite réelle ou complexe.

☒ **Condition NECESSAIRE de convergence :**

SI la série $\sum u_n$ converge, ALORS $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

ATTENTION !!! La réciproque est fausse.

Exemple fondamental : La série $\sum\limits_{n>0} \frac{1}{n}$, appelée série harmonique, est divergente.

☒ **Séries dont on sait calculer la somme :**

- **Séries géométriques**
  La série géométrique $\sum q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$. Dans ce cas sa somme vaut
  $$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$
- **Séries télescopiques**
  Pour $n \geq n_0$, on pose $v_n = u_{n+1} - u_n$. Alors la série télescopique $\sum\limits_{n\geq n_0} v_n$ converge si et seulement si la suite (u_n) converge. Dans ce cas sa somme vaut
  $$\sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n = -u_{n_0} + \lim_{n\to+\infty} u_n$$

☒ **Séries de Riemann**
Les séries de Riemann sont de la forme $\sum\limits_{n>0} \frac{1}{n^\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Une série de Riemann converge si et seulement si $\alpha > 1$.

☒ **Théorème de comparaison :**
Si (u_n) et (v_n) sont deux suites à termes POSITIFS, telles que $u_n \leq v_n$ (pour $n \geq n_0$), alors :
⇝ Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
⇝ Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

☒ **Critère de Riemann :**
Si la suite (u_n) est à termes POSITIFS, et s'il existe un réel $\alpha > 1$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = 0$, alors la série $\sum u_n$ converge.

☒ **Critère de d'Alembert :**
Si la suite (u_n) est à termes POSITIFS, et telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = L$, alors :
⇝ Si $L < 1$, $\sum u_n$ converge.
⇝ Si $L > 1$, $\sum u_n$ diverge.

3 Equations différentielles linéaires

3.1 Premier ordre

On note (E) : $a(t)y' + b(t)y = c(t)$, une équation différentielle linéaire du premier ordre (a, b, c sont des fonctions continues sur un intervalle I), et (H) : $a(t)y' + b(t)y = 0$, l'équation homogène associée.

☒ **Structure de l'ensemble des solutions :**

L'ensemble des solutions de (H) sur I est :

$$S_H = \left\{ \varphi : t \mapsto C\mathrm{e}^{-\int \frac{b}{a}},\ C \in \mathbb{K} \right\}$$

Etant donnée une solution particulière y_P de (E), toute solution de (E) est la somme de y_P et d'une solution de (H).

☒ **Variation de la constante :**

Pour trouver une solution particulière de (E), on cherche une solution sous la forme $y_P = \lambda h$ où λ est une fonction dérivable et h est une solution de (H).

3.2 Second ordre

On note (E) : $y'' + ay' + by = c(t)$, une équation différentielle linéaire du second ordre (a et b sont des réels, et c est une fonction continue sur un intervalle I), et (H) : $y'' + ay' + by = 0$, l'équation homogène associée.
On note (EC) : $r^2 + ar + b = 0$, l'équation caractéristique.

☒ **Structure de l'ensemble des solutions :**

⇝ Si (EC) a deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2, alors

$$S_H = \left\{ \varphi : t \mapsto A\mathrm{e}^{r_1 t} + B\mathrm{e}^{r_2 t}, (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

⇝ Si (EC) a deux solutions complexes conjuguées, $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$, alors

$$S_H = \left\{ \varphi : t \mapsto \mathrm{e}^{\alpha t} \left(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t) \right), (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

⇝ Si (EC) a une solution double r_0, alors

$$S_H = \left\{ \varphi : t \mapsto \mathrm{e}^{r_0 t}(At + B), (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Etant donnée une solution particulière y_P de (E), toute solution de (E) est la somme de y_P et d'une solution de (H).

☒ **Recherche d'une solution particulière :**

Lorsque c est une fonction de la forme $t \mapsto \mathrm{e}^{mt}P(t)$ où $m \in \mathbb{C}$, et P est un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$:

⇝ Si m, n'est pas une solution de (EC), alors (E) admet une solution de la forme $t \mapsto \mathrm{e}^{mt}Q(t)$, où Q est un polynôme de degré n.

⇝ Si m, est une solution simple de (EC), alors (E) admet une solution de la forme $t \mapsto \mathrm{e}^{mt}\, t\, Q(t)$, où Q est un polynôme de degré n.

⇝ Si m, est une solution double de (EC), alors (E) admet une solution de la forme $t \mapsto \mathrm{e}^{mt}\, t^2 Q(t)$, où Q est un polynôme de degré n.