AL 6 - Matrices symétriques - Coniques

Dans le chapitre, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique.

1 Matrices symétriques

Définition 1
$M \in M_n(\mathbb{R})$ est dite *symétrique* si

$$^tM = M$$

L'ensemble des matrices symétriques de $M_n(\mathbb{R})$ se note $S_n(\mathbb{R})$.
$f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ est dit *symétrique* si la matrice qui lui est canoniquement associée est symétrique.

Proposition 1
L'ensemble $S_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Proposition 2
$f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ est symétrique si, et seulement si

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \quad (f(x)|y) = (x|f(y))$$

Proposition 3
Le polynôme caractéristique d'une matrice symétrique réelle est scindé sur $\mathbb{R}$.

Proposition 4
Les sous-espaces propres d'une matrice symétrique réelle sont deux à deux orthogonaux.

Théorème 1 Théorème spectral
Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable en b.o.n., c'est-à-dire :
si $S \in S_n(\mathbb{R})$, alors il existe $D \in M_n(\mathbb{R})$ diagonale, et $P \in O_n(\mathbb{R})$ (orthogonale) telles que

$$S = PDP^{-1} = PD^tP$$

2 Coniques

Dans ce paragraphe, on se place dans le plan $\mathscr{P}$, muni d'un repère orthonormé $\mathscr{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
On note $\vec{\mathscr{P}}$ l'espace vectoriel $\mathrm{Vect}\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}\}$.

Définition 2
On appelle *conique* tout ensemble $\mathscr{C}$ de points M de coordonnées (x, y) dans $\mathscr{R}$ dont les coordonnées vérifient une équation de la forme :

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

avec $(a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6$, et $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

Une telle équation est appelée *équation de la conique $\mathscr{C}$*.

- $ax^2 + 2bxy + cy^2$ est appelée *partie quadratique* de l'équation ;
- $dx + ey$ est appelée *partie linéaire* de l'équation.

Proposition 5
Soit $\mathscr{C}$ une conique d'équation $ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ dans le repère $\mathscr{R}$.
En notant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in M_{2,1}(\mathbb{R})$, cette équation admet une écriture dite *matricielle* de la forme :

$$^tXSX + LX + f = 0$$

où $S = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{R})$ et $L = \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} \in M_{1,2}(\mathbb{R})$.

Vocabulaire
- La matrice S est appelée *matrice associée à la partie quadratique* de l'équation de $\mathscr{C}$.
- La matrice L est appelée *matrice associée à la partie linéaire* de l'équation de $\mathscr{C}$.

Proposition 6 Elimination du terme rectangle
Soit $\mathscr{C}$ une conique. Alors il existe une b.o.n. $(\vec{u}, \vec{v})$ de $\vec{\mathscr{P}}$ telle que l'équation de $\mathscr{C}$ dans le repère $\mathscr{R}' = (O, \vec{u}, \vec{v})$ soit de la forme :

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + \delta x_1 + \varepsilon y_1 + \mu = 0$$

où (x_1, y_1) désignent les coordonnées dans $\mathscr{R}'$ d'un point M de $\mathscr{P}$. De plus :
- λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres de la matrice associée à la partie quadratique de l'équation de $\mathscr{C}$;
- $\vec{u}$ (resp. $\vec{v}$) est un vecteur propre unitaire associé à la valeur propre λ_1 (resp. λ_2).

Définition 3
Soit $\mathscr{C}$ une conique d'équation $ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ dans le repère $\mathscr{R}$.
On note S la matrice de la partie quadratique de cette équation, et λ_1, λ_2 les valeurs propres de S.
- ► Si $\lambda_1\lambda_2 = 0$ (ce qui équivaut à $ac - b^2 = 0$), on dit que $\mathscr{C}$ est de genre *parabole*.
- ► Si $\lambda_1\lambda_2 > 0$ (ce qui équivaut à $ac - b^2 > 0$), on dit que $\mathscr{C}$ est de genre *ellipse* ;
- ► Si $\lambda_1\lambda_2 < 0$ (ce qui équivaut à $ac - b^2 < 0$), on dit que $\mathscr{C}$ est de genre *hyperbole* ;

Avec les notations précédentes, on cherche encore à réduire l'équation de la conique $\mathscr{C}$, et à déterminer des caractéristiques géométriques :

► Si $\boxed{\lambda_1\lambda_2 = 0}$ (par exemple $\lambda_2 = 0$) :

Proposition 7 Changement d'origine
Il existe un point $O' \in \mathscr{P}$ tel que l'équation de $\mathscr{C}$ dans le repère $\left(O', \vec{u}, \vec{v}\right)$ soit de la forme :

$$x'^2 + qy' = k$$

où (x', y') désigne un couple de coordonnées de $M \in \mathscr{P}$ dans $\left(O', \vec{u}, \vec{v}\right)$, et $(q, k) \in \mathbb{R}^2$.

↪ Si $q = 0$ et $k < 0$, alors $\mathscr{C} = \varnothing$.
↪ Si $q = 0$ et $k > 0$, alors $\mathscr{C}$ est la réunion de deux droites parallèles, non confondues.
↪ Si $q = k = 0$, alors $\mathscr{C}$ est une droite dirigée par $\vec{v}$.

↪ Si $q \neq 0$, alors $\mathscr{C}$ est une *parabole*.
Dans ce cas, il existe un point $\Omega \in \mathscr{P}$ tel que l'équation de $\mathscr{C}$ dans le repère $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ soit de la forme :

$$X^2 = 2pY$$

où (X, Y) désigne un couple de coordonnées de $M \in \mathscr{P}$ dans $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$, et $p \in \mathbb{R}$ s'appelle *paramètre* de la parabole.

Définition 4
- Une telle équation est appelée *équation réduite* de la parabole de paramètre p.
- Ω est appelé *sommet de la parabole.*

► Si $\boxed{\lambda_1\lambda_2 \neq 0}$

Proposition 8
La courbe $\mathscr{C}$ admet un unique point de symétrie $\Omega \in \mathscr{P}$, appelé *centre de la conique.*
Dans le repère $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$, $\mathscr{C}$ admet une équation de la forme :

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = k$$

où (X, Y) désigne un couple de coordonnées de $M \in \mathscr{P}$ dans $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$, et $k \in \mathbb{R}$.

Remarque 1
- On écrit l'équation de la conique $\mathscr{C}$ sous la forme $h(x, y) = 0$. Les coordonnées (x_0, y_0) dans $\mathscr{R}$ du centre de symétrie de la conique sont données par : $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial h}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$.
- Avec les mêmes notations, $k = -h(x_0, y_0)$.

↪ Si $\lambda_1\lambda_2 > 0$ et $\lambda_1 k < 0$, alors $\mathscr{C} = \varnothing$.
↪ Si $\lambda_1\lambda_2 > 0$ et $k = 0$, alors $\mathscr{C} = \{\Omega\}$.

↪ Si $\lambda_1\lambda_2 > 0$ et $\lambda_1 k > 0$, alors $\mathscr{C}$ est une *ellipse.*
Dans ce cas, l'équation de $\mathscr{C}$ dans le repère $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ s'écrit :

$$\frac{X^2}{\alpha^2} + \frac{Y^2}{\beta^2} = 1$$

où (X, Y) désigne un couple de coordonnées de $M \in \mathscr{P}$ dans $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$, et $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}^*)^2$.

Définition 5
Une telle équation est appelée *équation réduite* de l'ellipse.

Les points $A(\alpha, 0), A'(-\alpha, 0), B(0, \beta), et B'(0, -\beta)$ (coordonnées dans le repère $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$) sont appelés *sommets* de l'ellipse.

Si $\alpha > \beta$ (resp. $\alpha < \beta$), alors (AA') (resp. (BB')) est appelé *grand axe*, et (BB') (resp. (AA')) est appelé *petit axe* de l'ellipse.

Remarque 2
- Si $\alpha = \beta$, on reconnait l'équation cartésienne d'un cercle.

↪ Si $\lambda_1\lambda_2 < 0$ et $k = 0$, alors $\mathscr{C}$ est la réunion de deux droites sécantes.

↪ Si $\lambda_1\lambda_2 < 0$ et $k \neq 0$, alors $\mathscr{C}$ est une *hyperbole.*
Dans ce cas, l'équation de $\mathscr{C}$ dans le repère $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ s'écrit :

$$\frac{X^2}{\alpha^2} - \frac{Y^2}{\beta^2} = 1 \ ① \qquad \text{ou} \qquad \frac{Y^2}{\beta^2} - \frac{X^2}{\alpha^2} = 1 \ ②$$

où (X, Y) désigne un couple de coordonnées de $M \in \mathscr{P}$ dans $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$, et $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}^*)^2$.

Définition 6
Une telle équation est appelée *équation réduite* de l'hyperbole.

Dans le cas ①, (resp. le cas ②) les points $A(\alpha, 0)$ et $A'(-\alpha, 0)$ (resp.$B(0, \beta), et B'(0, -\beta)$) (coordonnées dans le repère $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$) sont appelés *sommets* de l'hyperbole.

Proposition 9
Les droites $\Delta : Y = \dfrac{\beta}{\alpha}X$ et $\Delta' : Y = -\dfrac{\beta}{\alpha}X$ (dans le repère $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$) sont asymptotes à la courbe $\mathscr{C}$.

Proposition 10
Soient $\mathscr{C}$ une conique et S la matrice de la partie quadratique de son équation. Alors :

- Si $\mathscr{C}$ est du genre parabole, alors elle admet un axe de symétrie dirigé par un vecteur propre de la valeur propre nulle de S.
- Si $\mathscr{C}$ est du genre ellipse ou hyperbole (conique à centre), alors elle admet deux axes de symétrie orthogonaux, dirigés par deux vecteurs propres orthogonaux de S.