AL 5 - Isométries d'un espace euclidien

Dans tout le chapitre E désigne un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, muni du produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ de norme associée $\|\cdot\|$.

1 Isométries vectorielles

Définition 1
Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est une *isométrie vectorielle* s'il conserve la norme, c'est-à-dire :

$$\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$$

Proposition 1
Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est une isométrie vectorielle si, et seulement si il conserve le produit scalaire, c'est-à-dire :

$$\forall (x, y) \in E^2, (u(x)|u(y)) = (x|y)$$

Proposition 2
Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est une isométrie vectorielle si, et seulement si l'image par u d'une b.o.n. est une b.o.n.

Proposition 3
Une isométrie vectorielle de E est un automorphisme de E, encore appelé *automorphisme orthogonal.*

Définition 2
Soit F est un sev de E.

- On appelle *symétrie orthogonale* par rapport à F la symétrie par rapport à F de direction $F^\perp$.
- Une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan (dim(F)$= n-1$) est appelée *réflexion.*

Proposition 4
Une symétrie orthogonale est un automorphisme orthogonal.

Définition 3
L'ensemble des automorphismes orthogonaux de E, noté $O(E)$, est appelé *groupe orthogonal* de E.

Proposition 5

- $\mathrm{Id}_E \in O(E)$.
- $(f, g) \in (O(E))^2 \Rightarrow f \circ g \in O(E)$.
- $f \in O(E) \Rightarrow f^{-1} \in O(E)$.

Proposition 6
Soit $u \in O(E)$. Si u admet des valeurs propres, alors $\mathrm{Spec}\{u\} \subset \{-1; 1\}$.

Proposition 7
Soient $u \in O(E)$, et F un sev de E. Si F est stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u.
Ainsi, si $\dim(F) = p$, alors la matrice de u dans une base adaptée à la décomposition $E = F \oplus F^\perp$ est diagonale par blocs, de la forme : $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ où $A \in M_p(\mathbb{R})$ et $B \in M_{n-p}(\mathbb{R})$.

2 Matrices orthogonales

Définition 4
Une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ est dite *orthogonale* si ${}^tMM = I_n$.
On note $O_n(\mathbb{R})$ (ou $O(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices orthogonales de $M_n(\mathbb{R})$, appelé *groupe orthogonal d'ordre n*.

Théorème 1
Si $\mathcal{B}$ est une **b.o.n.** de E, alors $u \in \mathcal{L}(E)$ est orthogonal si, et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est orthogonale.

Proposition 8
$M \in M_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si, et seulement si ses vecteurs colonnes (resp. lignes) forment une b.o.n. de $\mathbb{R}^n$.

Proposition 9
Si $\mathcal{B}_0$ est une b.o.n. de E, une base $\mathcal{B}$ de E est orthonormale si, et seulement si la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$ est orthogonale.

Proposition 10
- $M \in O(\mathbb{R}) \Rightarrow \det(M) = \pm 1$.
- $u \in O(E) \Rightarrow \det(u) = \pm 1$.

Définition 5
- L'ensemble $\{u \in O(E)/\det(u) = 1\}$ est appelé *groupe spécial orthogonal* de E. On le note $O^+(E)$ ou $SO(E)$.
  Les éléments de $O^+(E)$ sont appelés *isométries vectorielles positives*.
- L'ensemble $\{u \in O(E)/\det(u) = -1\}$ se note $O^-(E)$.
  Les éléments de $O^-(E)$ sont appelés *isométries vectorielles négatives*.
- L'ensemble $\{M \in O(\mathbb{R})/\det(M) = 1\}$ est également appelé *groupe spécial orthogonal* de E.
  On le note $O^+(n)$ ou $SO(n)$.
- L'ensemble $\{M \in O(\mathbb{R})/\det(M) = -1\}$ se note $O^-(n)$.

3 Endomorphismes orthogonaux en dimension 2 et 3

3.1 Orientation

Définition 6
On dit que deux bases (ordonnées) $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, ..., e'_n)$ d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E définissent *la même orientation* si la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ a un déterminant strictement positif.

Remarque 1
- Deux b.o.n. de E définissent la même orientation si, et seulement si leur matrice de passage appartient à $SO(n)$.

Définition 7
- *Orienter* E, c'est choisir une base (ordonnée) $\mathcal{B}$.
- Soit $\mathcal{B}'$ une base de E, orienté par $\mathcal{B}$. On dit que $\mathcal{B}'$ est *directe* si elle définit la même orientation que $\mathcal{B}$, et qu'elle est *indirecte* sinon.

3.2 Endomorphismes orthogonaux en dimension 2

Dans cette section, $n = 2$, et $\mathcal{B}$ désigne une b.o.n. directe.

3.2.1 Caractérisation

Théorème 2
$M \in O(2) \Leftrightarrow \exists \theta \in [0, 2\pi[\ /M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ ou $M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$

3.2.2 Ensemble $O^+(E)$

$O^+(2) = \left\{ R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} ; \theta \in [0, 2\pi[\right\}$

Proposition 11
$f \in SO(E) \Leftrightarrow \exists \theta \in [0, 2\pi[\ /\mathrm{Mat}_\mathcal{B}(f) = R_\theta$.
f est la *rotation d'angle* θ.

Proposition 12
Soit $f \in SO(E)$. Si $f \neq \pm \mathrm{Id}_E$, alors f n'est pas diagonalisable.

Proposition 13
- $R_\theta \times R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'}$
- $R_\theta^{-1} = R_{-\theta} =^t R_\theta$

3.2.3 Ensemble $O^-(E)$

$O^-(2) = \left\{ S_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} ; \theta \in [0, 2\pi[\right\}$

Proposition 14
$f \in O^-(E) \Leftrightarrow \exists \theta \in [0, 2\pi[\ /\mathrm{Mat}_\mathcal{B}(f) = S_\theta$.
f est une réflexion par rapport à $\mathrm{Vect}(u)$ où u a pour coordonnées $\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$ dans $\mathcal{B}$.

Proposition 15
Si $f \in O^-(E)$, alors f est diagonalisable, et $\mathrm{Spec}(f) = \{-1, 1\}$.

Proposition 16
- $S_\theta^2 = I_2$.
- $S_\theta^{-1} = S_\theta =^t S_\theta$.
- $S_\theta \times S_{\theta'} = R_{\theta-\theta'}$ (la composée de deux réflexions est une rotation).

3.2.4 Synthèse

Proposition 17 Classification par les invariants
Soit $f \in O(E)$. On note $F = \mathrm{Inv}(f) = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$. Alors :
$\hookrightarrow$ $\dim(F) = 0$ si, et seulement si f est une rotation (éventuellement égale à $-\mathrm{Id}_E$).
$\hookrightarrow$ $\dim(F) = 1$ si, et seulement si f est une réflexion.
$\hookrightarrow$ $\dim(F) = 2$ si, et seulement si f est l'identité.

Proposition 18 Classification par les espaces propres
Soit $f \in O(E)$. Alors :

$\hookrightarrow$ f est une rotation non triviale (c'est-à-dire différente de $\pm\mathrm{Id}_E$) si, et seulement si 1 et -1 ne sont pas valeurs propres de f.

$\hookrightarrow$ f est une réflexion si, et seulement si 1 et -1 sont valeurs propres de f,
(alors $\dim(E_1(f)) = \dim(E_{-1}(f)) = 1$).

$\hookrightarrow$ f est Id_E (resp. $-\mathrm{Id}_E$) si, et seulement si 1 (resp. -1) est l'unique valeur propre de f avec $\dim(E_1(f)) = 2$ (resp.$\dim(E_{-1}(f)) = 2$).

3.3 Endomorphismes orthogonaux en dimension 3

Dans cette section, $n = 3$.

Proposition 19
Soient $f \in O(E)$, et $F = \mathrm{Inv}(f) = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$.

- $F^\perp$ est stable par f.
- $g = f_{|F^\perp} \in O(F^\perp)$ et $\mathrm{Inv}(g)$=$\{0_E\}$.

3.3.1 Si dim(F)=3

$F = E$, et $f = \mathrm{Id}_E$.

3.3.2 Si dim(F)=2

$F^\perp$ est une droite ; $g = -\mathrm{Id}_{F^\perp}$ et f est la réflexion par rapport au plan F, notée S_F.

Proposition 20
Si $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est une base de E telle que : $F^\perp = \mathrm{Vect}\{\vec{k}\}$, et $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est une base de F, alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{diag}(1, 1, -1)$$

Remarque 2

- $\det(f) = -1$ et $f \in O^-(E)$.
- $\mathrm{Spec}(f) = \{-1, 1\}$; $F = E_1(f)$; $\dim(E_1(f)) = 2$ et $\dim(E_{-1}(f)) = 1$.

3.3.3 Si dim(F)=1

Proposition 21
Soient $\vec{k}$ tel que $F = \mathrm{Vect}\{\vec{k}\}$, et $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est une base de $F^\perp$ tels que $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ soit une b.o.n. de E, alors $g \in O(F^\perp)$, avec $\mathrm{Inv}(g)$= $\{0_E\}$.
g est une rotation d'angle θ dans $F^\perp$.
f est une *rotation d'angle θ d'axe F*, notée $R(\vec{k}, \theta)$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque 3

- $\det(f) = 1$ et $f \in O^+(E)$.
- $1 \in \mathrm{Spec}(f)$; $F = E_1(f)$.
- f est diagonalisable si, et seulement si $\theta \equiv \pi[2\pi]$.

Définition 8
$R(\vec{k},\pi)$ est appelée *demi-tour* ou *retournement* d'axe $\mathrm{Vect}\{\vec{k}\}$.

Proposition 22
Si $f = R(\vec{k},\theta)$, et $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est une b.o.n. de $F^{\perp}$ telle que $\mathcal{B} = (\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ b.o.n. directe de E, alors :
- $\mathrm{tr}(f) = 1 + 2\cos\theta$.
- $\cos\theta = (f(\vec{\imath})|\vec{\imath})$ et $\sin\theta = (f(\vec{\imath})|\vec{\jmath})$.

3.3.4 Si dim(F)=0

Proposition 23
Il existe un vecteur $\vec{k}$ non nul, tel que f soit la composée commutative de la rotation vectorielle $R(\vec{k},\theta)$, et de la réflexion par rapport au plan $\vec{k}^{\perp}$.
Dans la b.o.n. directe $\mathcal{B} = (\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ (où $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est une b.o.n. de $F^{\perp}$), on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Remarque 4
- $\det(f) = -1$ et $f \in O^{-}(E)$.
- $-1 \in \mathrm{Spec}(f)$.
- f est diagonalisable si, et seulement si $\theta \equiv \pi[2\pi]$, et alors $f = -\mathrm{Id}_E$.

Proposition 24
- Si P et P' sont deux plans, alors $S_P \circ S_{P'}$ est une rotation vectorielle.
- Toute rotation vectorielle est la composée de deux réflexions.
- Si $f \in O(E)$, telle que $\mathrm{Inv}(f) = \{0_E\}$, alors il existe trois plans P, P' et P'' tels que $f = S_{P''} \circ S_{P'} \circ S_P$.

3.3.5 Méthode pour réduire une matrice orthogonale dans $\mathbb{R}^3$

Soit $M \in O_3(\mathbb{R})$ (${}^tMM = I_3$), la matrice d'un endomorphisme orthogonal f.

$\hookrightarrow$ Si $\det(M)$=1, alors f est une rotation $R(\vec{k},\theta)$;
- $*$ $\vec{k} \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$;
- $*$ $\cos\theta = \dfrac{\mathrm{tr}(M) - 1}{2}$;
- $*$ Soient $\vec{\imath}$ un vecteur orthogonal à $\vec{k}$, et $\vec{\jmath} = \vec{k} \wedge \vec{\imath}$. Le signe de $\sin\theta$ est celui de $(f(\vec{\imath})|\vec{\jmath})$.

$\hookrightarrow$ Si $\det(M) = -1$, alors f est la composée d'une rotation $R(\vec{k},\theta)$ et de la réflexion par rapport au plan $\vec{k}^{\perp}$;
- $*$ $\vec{k} \in \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E)$;
- $*$ $\cos\theta = \dfrac{\mathrm{tr}(M) + 1}{2}$;
- $*$ Soient $\vec{\imath}$ un vecteur orthogonal à $\vec{k}$, et $\vec{\jmath} = \vec{k} \wedge \vec{\imath}$. Le signe de $\sin\theta$ est celui de $(f(\vec{\imath})|\vec{\jmath})$.

Remarque 5
- Si $\mathrm{tr}(M) = 1$, f est la réflexion par rapport à $\vec{k}^{\perp}$.