AL 4 - Espaces préhilbertiens

Dans tout le chapitre E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, I un ensemble quelconque.

1 Produit scalaire et norme associée

1.1 Produit scalaire

Définition 1
Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$. On dit que φ est :
- une *forme bilinéaire* si $\forall \alpha \in E, u \mapsto \varphi(\alpha, u)$ et $u \mapsto \varphi(u, \alpha)$ sont linéaires ;
- *symétrique* si $\forall (u, v) \in E^2, \varphi(u, v) = \varphi(v, u)$;
- *définie-positive* si $\forall u \in E, \varphi(u, u) \geq 0,$ et $\varphi(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$.

Définition 2
Une forme bilinéaire, symétrique, définie-positive sur E s'appelle un *produit scalaire* sur E.

Remarque 1
- Pour montrer qu'une application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ est un produit scalaire, il suffit de montrer qu'elle est symétrique, linéaire à droite (par rapport à la deuxième composante), définie-positive.
- Un produit scalaire $\varphi(u, v)$ se note souvent $(u|v)$ ou $< u|v >$ ou, s'il n'y a pas d'ambigüité $u \cdot v$.

Définition 3
- Un *espace préhilbertien réel* est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E muni d'un produit scalaire $(\cdot|\cdot)$.
  On note $(E, (\cdot|\cdot))$.
- Un *espace euclidien* est un espace préhilbertien réel de dimension finie.

Exemple 1
- Sur $E = \mathbb{R}^n$, on définit le *produit scalaire euclidien canonique* par : $(x|y) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k y_k$
  où $x = (x_1, ..., x_n)$ et $y = (y_1, ..., y_n)$.
- Sur $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, on définit un produit scalaire par $(f|g) = \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t$.
- Sur $E = \mathbb{R}[X]$, on a deux produits scalaires usuels :
  - celui provenant du produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$, défini par : $(P|Q) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k b_k$
    où $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ et $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k$;
  - celui provenant du produit scalaire sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ défini par : $(P|Q) = \displaystyle\int_a^b P(t)Q(t)\mathrm{d}t$

Dans la suite du chapitre, $(E, (\cdot|\cdot))$ désigne un espace préhilbertien réel.

1.2 Norme associée à un produit scalaire

Définition 4
L'application :

$$\| \cdot \| : u \to \|u\| = \sqrt{(u|u)}$$

est appelée *norme euclidienne associée au produit scalaire* $(\cdot|\cdot)$.

Vocabulaire
Un vecteur $u \in E$ tel que $\|u\| = 1$ est dit *unitaire* ou *normé*.

Proposition 1
$\forall (u, v) \in E^2$, on a les *identités de polarisation* :
- $(u|v) = \dfrac{1}{2}\left(\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\right)$
- $(u|v) = \dfrac{1}{2}\left(\|u\|^2 + \|v\|^2 - \|u-v\|^2\right)$
- $(u|v) = \dfrac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\right)$

On a également *l'identité du parallélogramme* :
- $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right)$

Remarque 2
- Les trois premières identités se nomment *identités de polarisation* car elles permettent de retrouver les angles, c'est-à-dire le produit scalaire, à partir de la seule connaissance des normes. En effet l'angle θ de deux vecteurs non nuls u et v vérifie : $\cos(\theta) = \dfrac{(u|v)}{\|u\|.\|v\|}$.
- La dernière identité se nomme *identité du parallélogramme* car elle donne une relation entre les carrés des longueurs des côtés $\|u\|^2$ et $\|v\|^2$ et les carrés des longueurs des diagonales $\|u+v\|^2$ et $\|u-v\|^2$.

Théorème 1
$\forall (u, v) \in E^2$, on a :
- **Inégalité de Cauchy-Schwarz**

$$|(u|v)| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

  avec égalité si, et seulement si les vecteurs sont liés.

- **Inégalité de Minkowski**

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

  avec égalité si, et seulement si les vecteurs sont positivement liés.

2 Orthogonalité

2.1 Vecteurs orthogonaux

Définition 5
- Deux vecteurs u et v de E sont dits *orthogonaux* si $(u|v) = 0$.
- Deux sev F_1 et F_2 de E sont dits *orthogonaux* si les vecteurs de F_1 sont orthogonaux aux vecteurs de F_2, c'est-à-dire $\forall (u_1, u_2) \in F_1 \times F_2, (u_1|u_2) = 0$.

Remarque 3
- Le singleton $\{0_E\}$ est orthogonal à tout sev de E.

Notation
Le symbole $\perp$ est le symbole d'orthogonalité.
- Pour $(u, v) \in E^2$, $u \perp v$ se lit u *orthogonal* à v.
- Pour F_1 et F_2 des sev de E, $F_1 \perp F_2$ se lit F_1 et F_2 sont *orthogonaux*.

Théorème 2 Théorème de Pythagore
$\forall (u, v) \in E^2$, on a :

$$u \perp v \Leftrightarrow \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

Définition 6
Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E.
- La famille est dite *orthogonale* si ses vecteurs sont deux à deux orthogonaux, c'est-à-dire si $\forall (i, j) \in I^2, i \neq j \Rightarrow (u_i | u_j) = 0$.
- La famille est dite *orthonormale* ou *orthonormée* si elle est orthogonale et si tous ses vecteurs sont normés, c'est-à-dire si $\forall (i, j) \in I^2, (u_i | u_j) = \delta_{i,j}$
  (où $\delta_{i,j}$ est le *symbole de Kronecker* : $\forall (i, j) \in I^2, \delta_{i,i} = 1$ et $\delta_{i,j} = 0$ si $i \neq j$)

Proposition 2
Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls de E est libre.

Proposition 3 Généralisation du théorème de Pythagore
Soit $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille orthogonale de vecteurs de E.Alors :

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} u_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|u_i\|^2$$

2.2 Orthogonal d'une partie de E

Définition 7
Soit A une partie non vide de E. On appelle *orthogonal* de A l'ensemble noté $A^\perp$ des vecteurs orthogonaux à tous les vecteurs de A :

$$A^\perp = \{u \in E / \forall v \in A, (u|v) = 0\}$$

Proposition 4
Pour toute partie non vide $A \subset E$, $A^\perp$ est un sev de E et $A^\perp = (\mathrm{Vect}(A))^\perp$.

Remarque 4
- Si F est un sev E de base $(u_i)_{i \in I}$, on a :

$$u \in F^\perp \Leftrightarrow \forall i \in I, (u_i | u) = 0$$

- $E^\perp = \{0_E\}$ et $\{0_E\}^\perp = E$.

Proposition 5
Pour toutes parties non vides A et B de E :
- $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$.
- $A \subset A^{\perp\perp}$.
- Si $0_E \in A, A \cap A^\perp = \{0_E\}$

3 Bases orthonormales d'un espace euclidien

3.1 Existence

Définition 8
On appelle *base orthonormale* ou *base orthonormée* de E, notée b.o.n., toute base de E qui soit aussi une famille orthonormée.

Proposition 6
Si E est un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, alors toute famille orthonormée de n vecteurs de E forme une base de E.

Théorème 3 Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt
Soit $(e_1, ..., e_p)$ une famille **libre** finie de E. Alors il existe une unique famille orthonormée $(u_1, ..., u_p)$ telle que :
- $\forall k \in [\![1, p]\!], \mathrm{Vect}(e_1, ..., e_k) = \mathrm{Vect}(u_1, ..., u_k)$
- $\forall k \in [\![1, p]\!], (e_k|u_k) > 0$

Corollaire
Tout espace euclidien admet une b.o.n.

3.2 Coordonnées dans une b.o.n.

Proposition 7
Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une b.o.n. d'un espace euclidien E. Alors les coordonnées $(x_1, ..., x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$ d'un vecteur x de E sont données par : $\forall i \in [\![1, n]\!], x_i = (e_i|x)$. Ainsi, on a :

$$\forall x \in E, x = \sum_{i=1}^{n} (e_i|x) e_i$$

Proposition 8
Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une b.o.n. d'un espace euclidien E. Soient x et y des vecteurs de E de coordonnées respectives $(x_1, ..., x_n)$ et $(y_1, ..., y_n)$ dans $\mathcal{B}$. Alors :

$$(x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

en particulier :

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Remarque 5
- En notant $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(y)$, on a : $(x|y) =^t XY =^t YX$, et $\|x\|^2 =^t XX$.

Proposition 9 Matrice d'un endomorphisme
Soient $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une b.o.n. d'un espace euclidien E, et $f \in \mathcal{L}(E)$ dont on note $M = (m_{i,j})$ la matrice dans la base $\mathcal{B}$. Alors :

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, m_{i,j} = (e_i|f(e_j))$$

4 Projection orthogonale

4.1 Supplémentaire orthogonal d'un sev

Théorème-Définition 1
Si F est un sev de **dimension finie** d'un espace préhilbertien E, alors F et $F^\perp$ sont supplémentaires dans E. On dit que le sev $F^\perp$ est *le supplémentaire orthogonal de* F ; on note : $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$

Proposition 10
Dans un espace euclidien, toute famille orthonormale peut être complétée en une base orthonormale.

4.2 Projection orthogonale

Dans la suite du chapitre, F désigne un sev de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$ de E.

Définition 9
La *projection orthogonale* p_F *sur* F est la projection sur F parallèlement à $F^\perp$.

Proposition 11
Soit $(e_1, ..., e_p)$ une b.o.n. de F.

$$\forall x \in E, p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} (x|e_i)e_i$$

Proposition 12 Inégalité de Bessel
Soit $(e_1, ..., e_p)$ une base orthonormale de vecteurs de F.

$$\forall x \in E, \|p_F(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{p} (x|e_i)^2 \leq \|x\|^2$$

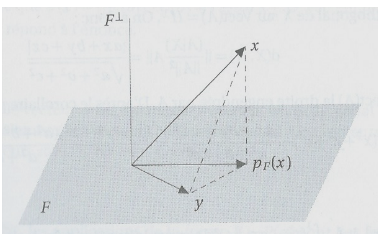
.

4.3 Distance à un sev

Définition 10
Soit F un sev de E. Soit $x \in E$. La *distance* de x à F est le réel positif :

$$d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|$$

Théorème 4
Soient F un sev de **dimension finie** de E, et $x \in E$
$p_F(x)$ l'unique vecteur y_0 de F tel que : $\|x - y_0\| = d(x, F)$.



Corollaire

$$\forall x \in E, (d(x, F))^2 = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2$$