AL 1 - Compléments d'algèbre linéaire

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ; $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

1 Espaces vectoriels

Dans ce paragraphe, I désigne un ensemble non vide, fini ou infini.

1.1 Familles de vecteurs

Définition 1
Une famille $\mathcal{F} = (x_i)_{i\in I} \in E^I$ de vecteurs de E est dite *génératice* (de E) si $\text{Vect}(\mathcal{F}) = E$.

Définition 2
Une famille $\mathcal{F} = (x_i)_{i\in I} \in E^I$ de vecteurs de E est dite *libre* si

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (i_1, ..., i_n) \in I^n, \forall (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n : \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_{i_k} = 0_E \Rightarrow \forall k \in [\![1, n]\!], \lambda_k = 0$$

Vocabulaire :
- Si une famille est libre, on dit que ses vecteurs sont *linéairement indépendants* ;
- Si une famille n'est pas libre, on dit qu'elle est *liée*.

Définition 3
On dit qu'une famille $\mathcal{F}$ de vecteurs de E est une *base* de E si elle est libre et génératrice.

Théorème 1
Une famille $\mathcal{F}$ de vecteurs de E est une base de E si, et seulement si tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{F}$.

Vocabulaire : Si $\mathcal{F} = (x_i)_{i\in I}$ est une base de E, alors pour tout vecteur x de E il existe un unique n-uplet de vecteurs $(x_{i_1}, ..., x_{i_n})$ de $\mathcal{F}$ (à l'ordre près) et un unique n-uplet de scalaires $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ non nuls tels que $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_{i_k}$.
- On dit que les λ_k sont les *coordonnées* de x dans la base $(x_i)_{i\in I}$
- On dit que les $\lambda_k x_{i_k}$ sont les *composantes* de x dans cette base.

Théorème 2
Tout espace vectoriel admet une base.

1.2 Espace vectoriel des polynômes

Proposition 1
L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes sur $\mathbb{K}$ en l'indéterminée X muni des lois usuelles est un espace vectoriel de dimension infinie sur $\mathbb{K}$ et de base $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$

Définition 4
Une famille de polynômes (P_k) indexée dans $\mathbb{N}$ est dite *à degrés échelonnés* ou *échelonnée* si :

$$\deg(P_1) < \deg(P_2) < ... < \deg(P_k) < ...$$

Proposition 2
Toute famille $(P_i)_{i\in I}$ de polynômes non nuls échelonnée est libre.

Proposition 3
Soit $(P_i)_{i\in I}$ une famille de polynômes telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \exists i \in I, \deg(P_i) = n$. Alors $(P_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}[X]$.

Corollaire : Une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \deg(P_n) = n$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.

1.3 Somme d'espaces vectoriels

Dans l'ensemble de ce paragraphe, $(E_i)_{1\leq i\leq p}$ désigne une famille de p sous-espaces vectoriels de E.

Définition 5
La *somme des sous-espaces* E_i est l'ensemble :

$$\sum_{i=1}^{p} E_i = \left\{ \sum_{i=1}^{p} x_i / \forall i \in [\![1,p]\!], x_i \in E_i \right\}$$

On le munit des lois induites par les lois de E.

Proposition 4

$$\sum_{i=1}^{p} E_i = \mathrm{Vect}\left(\bigcup_{i=1}^{p} E_i \right)$$

Définition 6
On dit que les E_i sont en *somme directe* si : $\forall x \in \sum_{i=1}^{p} E_i, \exists!(x_1, ..., x_p) \in E_1 \times ... \times E_p, x = \sum_{i=1}^{p} x_i$.

On note alors $\overset{p}{\underset{i=1}{\oplus}} E_i$ la somme $\sum_{i=1}^{p} E_i$.

Proposition 5

Une somme est directe si, et seulement si la seule décomposition de 0_E dans la somme est $\sum_{i=1}^{p} 0_{E_i}$.

Proposition 6

Si tous les sous-espaces vectoriels E_i sont de dimension finie, alors : $\dim\left(\sum_{i=1}^{p} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{p} \dim(E_i)$, avec égalité si, et seulement si la somme est directe.

Rappels :
- Deux sous-espaces vectoriels F et G sont dits *supplémentaires* si $E = F \oplus G$.
- $E = F \oplus G \Leftrightarrow E = F + G$ et $F \cap G = \{0_E\}$.
- Dans un espace vectoriel de dimension finie, tout sous-espace vectoriel admet un supplémentaire.
- Si E est de dimension finie, et si $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ est une base d'un sous-espace vectoriel F de E, alors le théorème de la base incomplète assure l'existence d'une base $(e_1, ..., e_p, e_{p+1}, ..., e_n)$ de E appelée *base adaptée à* F.

Théorème-Définition 1
Soient $(E_i)_{1\leq i\leq p}$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E en somme directe, et $\forall i \in [\![1,p]\!], \mathcal{B}_i$ une base de E_i. Alors la concaténation $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, ...\mathcal{B}_p)$, est une base de $\overset{p}{\underset{i=1}{\oplus}} E_i$, dite *base adaptée* à cette somme directe.

Proposition 7
Soit $(n_1, ..., n_p) \in (\mathbb{N}^*)^p$ et $\mathcal{B} = (e^i_j)_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq n_i}}$ une base de E. On note pour tout $i \in [\![1,p]\!]$,

$\mathcal{B}_i = (e^i_1, ..., e^i_{n_i})$ ($\mathcal{B}$ est la concaténation de $\mathcal{B}_1, ..., \mathcal{B}_p$), et $E_i = \mathrm{Vect}(\mathcal{B}_i)$. Alors on a : $E = \overset{p}{\underset{i=1}{\oplus}} E_i$.

2 Applications linéaires

2.1 Endomorphismes remarquables

Dans l'ensemble de ce paragraphe, F et G désignent deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.

2.1.1 Projecteur

Définition 7
On appelle *projecteur* sur F parallèlement à G l'endomorphisme p défini sur E par ses restrictions : $p_{|F} = \mathrm{Id}$ et $p_{|G} = 0$.

Remarque 1
- Si on note $x = x_F + x_G$ la décomposition de x suivant F et G, alors $p(x) = x_F$.
- Si on note p_F le projecteur sur F parallèlement à G et p_G le projecteur sur G parallèlement à F, alors : $p_F + p_G = \mathrm{Id}_E$ et $p_F \circ p_G = p_G \circ p_F = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Proposition 8
Si p est le projecteur sur F parallèlement à G, alors $\mathrm{Im}(p) = F, \mathrm{Ker}(p) = G$ et $\mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p) = E$..

Proposition 9
Soit p une application de E dans E. Alors p est un projecteur $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} p \text{ linéaire} \\ p\circ p = p \end{array}\right.$.
Dans ce cas, p est le projecteur sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.

Définition 8
Soit $(E_i)_{1\leq i\leq p}$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E telle que $E = \overset{p}{\underset{i=1}{\oplus}} E_i$.
Pour $i \in [\![1,p]\!]$, on définit le projecteur sur E_i parallèlement à $F_i = \overset{p}{\underset{\substack{j=1\\ j\neq i}}{\oplus}} E_j$ comme l'unique application linéaire telle que : $\left\{\begin{array}{ll} p_i(x) = x & \text{si } x \in E_i \\ p_i(x) = 0 & \text{si } x \in F_i \end{array}\right.$.

Remarque 2
- Si $x = x_i + y_i$ (avec $(x_i, y_i) \in E_i \times F_i$) est l'unique décomposition de x dans $E_i \oplus F_i$, alors $p_i(x) = x_i$.

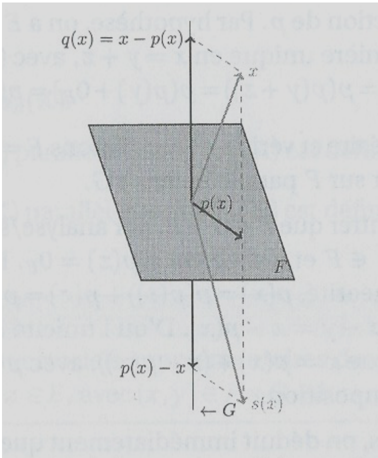
Proposition 10
Avec les mêmes hypothèses et notations, on a :
- $p_i \circ p_i = p_i$; $p_i \circ p_j = 0$ si $i \neq j$.
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} p_i = \mathrm{Id}_E$.

2.1.2 Symétrie

Définition 9
On appelle *symétrie* par rapport à F parallèlement à G l'endomorphisme s défini sur E par ses restrictions : $s_{|F} = \mathrm{Id}$ et $s_{|G} = -Id$.

Remarque 3
- Si on note $x = x_F + x_G$ la décomposition de x suivant F et G, alors $s(x) = x_F - x_G$.
- Si on note p le projecteur sur F parallèlement à G alors : $s = 2p - \mathrm{Id}_E$.

Proposition 11
Soit s une application de E dans E. Alors s est une symétrie $\Leftrightarrow \begin{cases} s \text{ linéaire} \\ s \circ s = \mathrm{Id}_E \end{cases}$
Dans ce cas, s est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id})$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id})$.



2.2 Equations linéaires

Définition 10
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $b \in F$ et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
- Toute équation du type (L) : $f(x) = b$ est appelée *équation linéaire.*
- L'équation (H) : $f(x) = 0$ est appelée *équation homogène* associée à (L).

Proposition 12
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $b \in F$ et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On note (L) : $f(x) = b$.
- L'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à (L) est $S_H = \mathrm{Ker}(f)$.
- L'ensemble des solutions de l'équation (L) est :
$$S_L = \begin{cases} x_0 + S_H = \{x_0 + x \mid x \in S_H\} & \text{si } b = f(x_0) \in \mathrm{Im}(f) \\ \varnothing & \text{sinon} \end{cases}$$

2.3 Hyperplans

Définition 11
On appelle *hyperplan* d'un espace vectoriel E tout sous-espace vectoriel admettant un supplémentaire de dimension 1 (c'est-à-dire une droite vectorielle).

Remarque 4
- Si E est de dimension finie n, tout hyperplan est de dimension $n - 1$.

Définition 12
On appelle *forme linéaire* sur E toute application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

Proposition 13
Une partie H de l'espace vectoriel E est un hyperplan si, et seulement si H est le noyau d'une forme linéaire non nulle (c'est-à-dire qu'il existe $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ telle que $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$).

Définition 13
Soit $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$ un hyperplan de E. On dit que l'identité scalaire $\varphi(x) = 0$ est **une** *équation* de H.

Proposition 14
Soit φ une forme linéaire non nulle sur E. Alors toute forme linéaire ψ s'annulant sur $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$ est proportionnelle à φ, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\psi = \lambda\varphi$.
En particulier deux équations d'un hyperplan sont proportionnelles.

Remarque 5

- Si E est de dimension finie n, de base $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$, soient φ une forme linéaire sur E et $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$; alors pour $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, on a $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$, avec $\forall i \in [\![1, n]\!], a_i = \varphi(e_i) \in \mathbb{K}$.
  Une équation de H dans la base $\mathcal{B}$ est alors $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$.

Proposition 15
Soient $H_1, ..., H_p$ des hyperplans, et $\varphi_1, ..., \varphi_p$ des formes linéaires telles que : $\forall i \in [\![1, p]\!], \mathrm{Ker}(\varphi_i) = H_i$.

- L'application $f = (\varphi_1, ..., \varphi_p)$ est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}^p$;
  son noyau est $\mathrm{Ker}(f) = \bigcap_{i=1}^{p} H_i$;
- Si le rang de la famille $(\varphi_1, ..., \varphi_p)$ est $r \leq p$, alors $\bigcap_{i=1}^{p} H_i$ est un espace vectoriel de dimension $n - r \geq n - p$.

Proposition 16
Si E est de dimension n, et F est un sous-espace vectoriel de E de dimension $p < n$, alors F est l'intersection de $n - p$ hyperplans de E.

3 Matrices

Dans ce paragraphe, n et p désignent des entiers naturels non nuls ; $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$.

3.1 Matrices par blocs

Définition 14
Soient $(n_1, ..., n_l) \in (\mathbb{N}^*)^l$, et $(p_1, ..., p_c) \in (\mathbb{N}^*)^c$ tels que $n_1 + ... + n_l = n$ et $p_1 + ... + p_c = p$.

On définit la matrice A *par blocs* en notant $A = (A_{n_i,p_j})_{\substack{1 \leq i \leq l \\ 1 \leq j \leq c}} = \begin{pmatrix} A_{n_1,p_1} & \cdots & A_{n_1,p_c} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n_l,p_1} & \cdots & A_{n_l,p_c} \end{pmatrix}$

telle que $\forall i \in [\![1, l]\!], \forall j \in [\![1, c]\!], A_{n_i,p_j} \in M_{n_i,p_j}$

Vocabulaire :

- Une matrice *diagonale par blocs* est une matrice dont les blocs diagonaux sont des matrices carrées et sont les seuls blocs non nuls :

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_n \end{pmatrix}$$

- Une matrice *triangulaire supérieure par blocs* est une matrice dont les blocs diagonaux sont des matrices carrées et ceux situés en-dessous sont nuls :

$$\begin{pmatrix} A_1 & * & \dots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & A_n \end{pmatrix}$$

Remarque 6

- A condition de compatibilité dans les dimensions, les règles de calculs (produit par un scalaire, somme, produit) pour les matrices définies par blocs sont les mêmes que dans $M_{n,p}(\mathbb{K})$.

3.2 Sous espaces vectoriels stables par un endomorphisme

Définition 15
Soient F un sous-espace vectoriel de E, et $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que F est *stable* par u ou que u laisse F stable si $u(F) \subset F$, c'est-à-dire si $\forall x \in F, u(x) \in F$.

Définition 16
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ laissant stable un sous-espace vectoriel F. Alors la restriction de u à F est à valeurs dans F, et on peut définir un endomorphisme $\tilde{u}_F \in \mathcal{L}(F)$ par : $\forall x \in F, \tilde{u}_F(x) = u(x)$. Cet endomorphisme est appelé *endomorphisme induit* par u sur F.

Proposition 17
Si E est de dimension n, soient F un sous-espace vectoriel de E de dimension p, et $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E adaptée à F. F est stable par $u \in \mathcal{L}(E)$ si, et seulement si la matrice de u dans $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure par blocs, de la forme : $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$.
Dans ce cas, la matrice $A \in M_p(\mathbb{R})$ est la matrice de l'endomorphisme $\tilde{u}_F$ induit par u sur F.

3.3 Matrices semblables

Définition 17
Deux matrices A et B de $M_n(\mathbb{K})$ sont dites *semblables* s'il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

Proposition 18
La relation "est semblable à", appelée *relation de similitude*, est une relation d'équivalence (réflexive, symétrique, transitive).

Proposition 19
Soient $A \in M_n(\mathbb{K})$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A.
Une matrice $A' \in M_n(\mathbb{K})$ est semblable à A si, et seulement si il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^n$ telle que A' soit la matrice de u dans $\mathcal{B}$.

3.4 Trace

Définition 18
La *trace* d'une matrice $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K})$ est la somme de ses coefficients diagonaux.
On note $\mathrm{tr}(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

Proposition 20
La trace est une forme linéaire sur $M_n(\mathbb{K})$, c'est-à-dire : $\forall (A, B) \in (M_n(\mathbb{K}))^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}$:
- $\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$
- $\mathrm{tr}(\lambda A) = \lambda \mathrm{tr}(A)$

Proposition 21
Soit $(A, B) \in (M_n(\mathbb{K}))^2$. On a $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

Conséquence 1
- Deux matrices semblables ont la même trace. On dit que la trace est un *invariant de similitude.*
- Si E est de dimension finie, soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Toutes les matrices carrées représentant u ont la même trace, que l'on note $\mathrm{tr}(u)$ appelée *trace de l'endomorphisme* u.