AL 0 - REVISIONS D'ALGEBRE LINEAIRE

1 Espaces vectoriels

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

☒ **Espace vectoriel**

On appelle **espace vectoriel** sur $\mathbb{K}$ tout ensemble E muni d'une loi interne notée $+$ et d'une loi externe notée $\cdot$ telles que :

⋆ La loi $+$ vérifie les propriétés suivantes :

⇝ $\forall (x,y,z) \in E^3, x+(y+z) = (x+y)+z$ (*associativité*)

⇝ $\forall (x,y) \in E^2, x+y = y+x$ (*commutativité*)

⇝ $\exists ! e \in E, \forall x \in E, x+e = x$. On note 0_E ou plus simplement 0 cet élément, appelé *élément neutre.*

⇝ $\forall x \in E, \exists ! x' \in E, x+x' = e$. On note $-x$ cet élément, appelé *opposé* de x.

⋆ La loi externe $\cdot$ vérifie les propriétés suivantes :

$\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (x,y) \in E^2$:

⇝ $(\lambda+\mu)\cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$

⇝ $\lambda \cdot (x+y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$

⇝ $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu)\cdot x$

⇝ $1 \cdot x = x$

Remarque : On vérifie rarement l'ensemble de ces axiomes pour montrer que l'on a un espace vectoriel. Généralement, il suffit de montrer que l'ensemble est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu...

☒ **Sous-espace vectoriel**

- **Définition :**
  Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F \subset E$. F est un **sous-espace vectoriel de** E si :
  ⋆ $0_E \in F$
  ⋆ $\forall (x,y) \in F^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \cdot x + y \in F$

- **Sous-espace vectoriel engendré par une partie** A **:**
  Soit A une partie d'un espace vectoriel E. L'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant A s'appelle **le sous-espace vectoriel engendré par** A. On le note $\mathrm{Vect}(A)$.
  $\mathrm{Vect}(A)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de A, c'est-à-dire :

$$x \in \mathrm{Vect}(A) \Leftrightarrow \left(\exists n \in \mathbb{N}^*, \exists (x_1, \cdots, x_n) \in A^n, \exists (\lambda_1, \cdots \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \right)$$

Méthode : Pour montrer qu'une partie F de $\mathbb{R}^n$ définie par une ou plusieurs équation(s) est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, on part de la ou des équation(s) et on montre que tout vecteur de F s'écrit comme une combinaison linéaire de vecteurs fixés de $\mathbb{R}^n$ qui forment une famille $\mathscr{B}$;
on a alors $F = \mathrm{Vect}(\mathscr{B})$.

Exemple : $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+y+z = 0\}$.
$(x,y,z) \in F \Leftrightarrow z = -x-y \Leftrightarrow (x,y,z) = (x,y,-x-y) \Leftrightarrow (x,y,z) = x(1,0,-1) + y(0,1,-1)$.
Ainsi, $F = \mathrm{Vect}\{(1,0,-1),(0,1,-1)\}$, est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
Inutile dans ce cas de vérifier les axiomes de définition d'un sous-espace vectoriel...

- **Somme de sous-espaces vectoriels :**
Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. On note
$$F_1 + F_2 = \{x \in E / \exists (x_1, x_2) \in F_1 \times F_2, x = x_1 + x_2\}$$
$F_1 + F_2$ est un sous-espace vectoriel de E appelé **somme de** F_1 **et** F_2.
Si $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$, on dit que F_1 et F_2 sont en **somme directe**, et on note $F_1 \oplus F_2$ au lieu de $F_1 + F_2$.
Si $F_1 \oplus F_2 = E$ on dit que F_1 et F_2 sont **supplémentaires**.

☒ **Familles de vecteurs**

- **Famille libre :**
Soit $\{x_1, \cdots x_n\}$ une famille de vecteurs de E. On dit que la famille est **libre** si :
$\forall (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0 \Rightarrow \forall i \in [\![1, n]\!], \lambda_i = 0 \right)$.
Si une famille n'est pas libre, elle est **liée**.

- **Famille génératrice :**
Soit $A = \{x_1, \cdots x_n, ...\}$ une famille de vecteurs de E (finie ou infinie). On dit que la famille est **génératrice de** E si Vect(A)=E.
Si E admet une famille génératrice finie, on dit qu'il est **de dimension finie**.

- **Base :**
On appelle **base de** E toute famille libre et génératrice de E.
Propriété : Tout vecteur de E s'écrit de façon unique comme une combinaison linéaire de vecteurs d'une base donnée (à l'ordre près des termes).
Théorème : Tout espace vectoriel $E \neq \{0\}$ admet au moins une base.

☒ **Dimension finie**

- **Théorème :**
Si E est un espace vectoriel de dimension finie, alors toutes ses bases ont le même cardinal, appelé **dimension de** E, noté dim(E).

- **Propriétés :**
Si E est un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, alors :
✓ Toute famille libre est de cardinal au plus n ;
toute famille libre de cardinal n est une base de E.
Remarque : toute famille de cardinal strictement supérieur à n est liée.
✓ Toute famille génératrice est de cardinal au moins n ;
toute famille génératrice de cardinal n est une base de E.

- **Formule de Grassmann :**
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un espace vectoriel E. Alors on a :
$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

- **Sous-espaces supplémentaires :**
Si E est un espace vectoriel de dimension finie n alors tout sous-espace vectoriel de dimension $p \leq n$ admet un supplémentaire de dimension $n - p$.
Si F et G sont deux sous-espace vectoriels de E, alors les propositions suivantes sont équivalentes :
(1) $E = F \oplus G$
(2) $F \cap G = \{0\}$ et dim(E)=dim(F)+dim(G)
(3) $E = F + G$ et dim(E)=dim(F)+dim(G)

2 Applications linéaires

☒ Application linéaire

- **Définition :**
Une application f entre deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F est une **application linéaire** si :

$$\forall (x,y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, f(\lambda \cdot x + y) = \lambda \cdot f(x) + f(y)$$

L'ensemble des applications linéaires de E dans F se note $\mathscr{L}(E,F)$.

- **Vocabulaire :**
⇝ Si $E = F$ une application linéaire est appelée un **endomorphisme** ; on note $\mathscr{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.
⇝ Si une application linéaire est bijective on dit que c'est un **isomorphisme**.
⇝ Si $E = F$, un isomorphisme est appelé un **automorphisme**.

☒ Caractéristiques

- **Noyau :**
On appelle **noyau** de $f \in \mathscr{L}(E,F)$ le sous-espace vectoriel de E défini par :

$$\text{Ker}(f) = \{x \in E / f(x) = 0_F\}$$

Méthode : Si E est de dimension finie, pour déterminer le noyau d'une application linéaire f, on résout l'équation $f(x) = 0$.
Exemple : Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (a,b,c) & \mapsto & (a+b, b+c, a+2b+c) \end{array} \right.$

$$(a,b,c) \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a+b=0 \\ b+c=0 \\ a+2b+c=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a=-b \\ c=-b \end{array} \right. \Leftrightarrow (a,b,c) \in \text{Vect}\left((-1,1,-1)\right)$$

- **Image :**
On appelle **image** de $f \in \mathscr{L}(E,F)$ le sous-espace vectoriel de F défini par :

$$\text{Im}(f) = \{y \in F / \exists x \in E, f(x) = y\}$$

Méthode : Si $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base de E, alors $\text{Im}(f)$=$\text{Vect}(f(e_1), \cdots, f(e_n)))$.

- **Propriétés :**
⇝ $f \in \mathscr{L}(E,F)$ est injective si, et seulement si $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$.
⇝ $f \in \mathscr{L}(E,F)$ est surjective si, et seulement si $\text{Im}(f) = F$.
⇝ Si E et F sont de dimensions finies, avec $\dim(E) = \dim(F)$ alors, pour $f \in \mathscr{L}(E,F)$:
(f injective) ⇔ (f surjective) ⇔ (f bijective).

☒ Rang

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$, où E est de dimension finie.

- **Définition :**
On appelle **rang** de f, et on note $\text{rg}(f)$, l'entier $\dim(\text{Im}(f))$.

- **Théorème du rang :**

$$\dim(E) = \text{rg}(f) + \dim(\text{Ker}(f))$$

☒ **Matrice d'une application linéaire**

E et F sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, avec $\dim(E) = p$ et $\dim(F) = n$;
on note $\mathscr{B} = \{e_1, \cdots e_p\}$ et $\mathscr{B}' = \{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n\}$ des bases de E et F respectivement.
Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

- **Définition :**
  On appelle **matrice de f relativement aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$** la matrice de $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$ dont les colonnes sont les coordonnées dans la base $\mathscr{B}'$ des vecteurs de la base $\mathscr{B}$, c'est-à-dire, si on note pour tout $j \in [\![1, p]\!], f(e_j) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\varepsilon_i$:

$$\operatorname{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

  Remarque : Lorsque $\mathscr{B} = \mathscr{B}'$, on parle de **matrice de f dans la base $\mathscr{B}$**, et on note $\operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

- **Propriété :**
  En notant X la matrice colonne des coordonnées dans $\mathscr{B}$ d'un vecteur x de E, Y la matrice colonne des coordonnées dans $\mathscr{B}'$ de $f(x)$ et M la matrice de f relativement aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$, on a :

$$Y = MX$$

☒ **Changement de base**

On considère deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ d'un espace vectoriel E de dimension finie.

- **Matrice de passage :**
  On appelle **matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$** la matrice de l'application identité Id_E relativement aux bases $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{B}$: $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E)$.
  C'est la matrice dont les colonnes sont formées par les coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ des vecteurs de $\mathscr{B}'$.

- **Changement de base pour un vecteur**
  Soient $x \in E$, X la matrice colonne des coordonnées de x dans $\mathscr{B}$ et X' la matrice colonne des coordonnées de x dans $\mathscr{B}'$. On a :

$$X = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}X'$$

  Remarque : On a : $P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} = P^{-1}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$.

- **Changement de base pour un endomorphisme :**
  Soient $f \in \mathscr{L}(E), M$ la matrice de f relativement à la base $\mathscr{B}$, M' la matrice de f relativement à la base $\mathscr{B}'$, et P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$. On a :

$$M' = P^{-1}MP$$