A2 - 2026		01/10/2022

DEVOIR SURVEILLE 1

M A T H S

icam

Le détail et la qualité du Français de vos réponses comptent !!

Exercice 1 :

1) Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 6 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$
   Déterminer s'ils existent des réels x et y de sorte que $xA + yB = C$.
2) Soient A, B des matrices de taille n. Développer et simplifier l'expression suivante :
$$S = (2A)(3B) - (A + 2B)^2 + (A - B)(A + B)$$

Exercice 2 :

Déterminer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 3 :

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

1) Déterminer la matrice B et le réel a tels que $A = aI_3 + B$
2) Calculer B^3
3) En déduire la forme générale de A^n en fonction de I_3, B et B^2.
4) Ecrire la matrice A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$

Exercice 4 :

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

1) Montrer que $A^3 - A^2 - A + I_3 = 0_3$
2) En déduire que A est inversible (justifier proprement) et une expression de A^{-1} en fonction de A.
3) Calculer A^{-1}

Tournez la page !

Exercice 5 :

1) Soit la droite (D) d'équations paramétriques : $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 + 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$ et les points $A(1;5;0)$ et $B(2;-1;1)$.
   a) Les points A et B appartiennent-ils à la droite (D) ?
   b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D') passant par B et parallèle à la droite (D).
2) Déterminer un système d'équations paramétriques du plan P passant par $C(0;-5;1)$ et de vecteurs directeurs : $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$
3) Déterminer les coordonnées du point d'intersection I de la droite (D) de vecteur directeur $\vec{w}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ passant par $D(-1;\ 2;\ 1)$ et du plan P.
4) On donne la droite de l'espace : (Δ): $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + t \end{cases}$
   Déterminer les coordonnées du point d'intersection (s'il existe) de (D) et (Δ)

Dijols
Fabien
A2

DS n°1 Mathématiques 01/10/22

note :

observations :

Excellent

24/25

Exercice 1 : 4,5

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 6 & -3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Déterminer s'il existe des réels x et y tels que $xA + yB = C$ revient à résoudre ce système :

$$\begin{cases} x + 5y = -3 \\ 2x + 4y = -2 \\ -3x + 3y = -3 \\ 4x + 2y = 0 \\ 6x + 4y = -1 \\ -3x = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = -2/3 \\ y = -2/3 \\ y = -2/3 \\ y = -2/3 \\ y = -3/4 \end{cases}$$

2,5

On se rend compte qu'il y a une incohérence car y ne peut pas valoir $-2/3$ et $-3/4$ en même temps donc il n'existe pas de réels x et y tels que $xA + yB = C$

2)

$$S = \overset{6AB}{(2A)(3B)} - (A+2B)^2 + (A-B)(A+B)$$

$$= 6 + 2B + 3A + AB - A^2 - 2AB - 2BA - \overset{4B^2}{B^2} + A^2 + AB - BA - B^2$$

$$= 3A + 2B + 4AB + BA + 6$$

$$5AB - 3BA - 5B^2$$

1,5

Exercice 2 :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ Le but est de calculer A^{-1} si cette matrice existe. Pour cela, utilisons le pivot de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ L_3 - L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ L_3 - L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ -\frac{1}{2} L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right)$$

3/3

$$\begin{array}{c} L_1 - L_3 \\ L_2 - L_3 \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right)$$

On a donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

Vérifions ce résultat, pour cela calculons $A \times A^{-1}$ et vérifions si ce produit est bien égal à I_3

$$A \times A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La vérification semble correcte.

Exercice 3 : 6/6

1) $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

Il semble que $A = a I_3 + B$ pour $a = 5$

et $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 1

2) Calcul de B^3 :

$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B^3 = B \times B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 1

3) $A = 5 I_3 + B$

Donc $A^n = (5 I_3 + B)^n$

$= (B + 5 I_3)^n$

Donc $A^n = \binom{n}{0} B^0 (5I_3)^n + \binom{n}{1} B^1 (5I_3)^{n-1} + \binom{n}{2} B^2 (5I_3)^{n-2}$

car $B^3 = 0$ donc $B^n = 0$ pour $n \geq 3$ car $B^n = B^{n-3} \times B^3$.

Ainsi $A^n = 5^n I_3 + n B \times 5^{n-1} I_3 + \frac{n(n-1)}{2} B^2 \times 5^{n-2} \times I_3$

$$A^n = 5^n I_3 + n 5^{n-1} B + \frac{n(n-1)}{2} \times 5^{n-2} B^2$$ 2

4) Ainsi A^n s'écrit :

$$A^n = \begin{pmatrix} 5^n & 2n \times 5^{n-1} & n5^{n-1} + 2n(n-1) \times 5^{n-2} \\ 0 & 5^n & 2n \times 5^{n-1} \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix}$$ 2

Exercice 4 : 5/5

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

4

Exercice 4 :

$$A^3 - A^2 - A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2

Donc $A^3 - A^2 - A + I_3 = O_3$

2) On a $A^3 - A^2 - A + I_3 = O_3$

soit $A(A^2 - A - I) = -I_3$

2

$A(-A^2 + A + I_3) = -I_3$

or la seule matrice qui multiplié par A donne I_3 est la matrice inverse de A : A^{-1}.

On en déduit que A est inversible et que $A^{-1} = -A^2 + A + I_3$

3) calculons A^{-1} :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1

Vérifions si $A \times A^{-1} = I_3$

$$A \times A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc il semble que la matrice A^{-1} soit correcte.

5

Exercice 5 : 16

1) a) Vérifions si a et b appartiennent à (D).

$a(1;5;0)$ et $b(2;-1;1)$

Pour cela posons :

$$\begin{cases} 1 = 2-t \\ 5 = 3+2t \\ 0 = -1+t \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = 1 \\ t = 1 \\ t = 1 \end{cases}$$

1

cela semble correct donc $a \in (D)$

$$\begin{cases} 2 = 2-t \\ -1 = 3+2t \\ 1 = -1+t \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = 0 \\ t = -2 \\ t = 2 \end{cases}$$

Les coordonnées du point b ne correspondent pas avec l'équation paramétrique de (D) donc $b \notin (D)$.

b) La droite (D') est parallèle à (D) ; son vecteur directeur est donc le même que celui de (D).
Soit $\vec{v}(-1;2;1)$. De plus (D') passe par B.
Une représentation paramétrique de (D') est donc :

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

1

2) P passe par $C(0;-5;1)$ et a pour vecteurs directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$

Une représentation paramétrique de P est alors :

$$\begin{cases} x = -2\lambda + t \\ y = -5 + \lambda \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

1

3)

$$(D) \begin{cases} x = 2k - 1 \\ y = -3k + 2 \\ z = 5k + 1 \end{cases}$$

Trouver I revient à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 2k-1 = -2\lambda + t \\ -3k+2 = -5+\lambda \\ 5k+1 = 1+2t \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2k+2\lambda-t = 1 \\ -3k-\lambda = -7 \\ 5k - 2t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2k+2\lambda-t = 1 \\ \lambda = -3k+7 \\ k = \frac{2}{5}t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{4}{5}t+2\lambda-t = 1 \\ \lambda = -\frac{6}{5}t+7 \\ k = \frac{2}{5}t \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4/5\,t - 12/5\,t + 14 - t = 1 \\ \lambda = -6/5\,t + 7 \\ k = 2/5\,t \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{13}{5}t = -13 \\ \lambda = -6/5\,t + 7 \\ k = 2/5\,t \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = 5 \\ \lambda = 1 \\ k = 2 \end{cases}$$

Ainsi (D) et P se croise lorsque $t = 6/5$; $\lambda = -6/5$ et $k = -8/5$ remplaçons k par sa valeur dans l'équation paramétrique de (D)

$$\begin{cases} x = -1 + 4 \\ y = 2 - 6 \\ z = 1 + 10 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3 \\ y = -4 \\ z = 11 \end{cases}$$

2

Ainsi le point d'intersection I à pour coordonnées

$(3 \; ; -4 \; ; 11)$

Exercice 5 :

1) $(\Delta) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + t \end{cases}$

$(D) : \begin{cases} x' = -1 + 2k \\ y = 2 - 3k \\ z = 1 + 5k \end{cases}$

S'il existe un point d'intersection alors le système suivant possède une solution :

$$\begin{cases} 1 + t = -1 + 2k \\ 2 - t = 2 - 3k \\ 3 + t = 1 + 5k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2k - 2 \\ t = 3k \\ t = 5k - 2 \end{cases}$$

1

Or ici on a $t = 2k - 2 = 5k - 2$

donc $2k = 5k$ soit $k = 0$ or puisque $t = 3k$ alors $t = 0$

or $t = 2k - 2 = -2$ si $k = 0$ donc le système n'a pas de solution. Cela signifie que (Δ) et (D) ne se croise pas, elles sont donc parallèle ou non-coplanaire. Ici, les vecteurs directeurs de (D) et de (Δ) ne sont pas colinéaires donc (D) et (Δ) ne sont pas coplanaires.