A2 - 2026		19/11/2022

DEVOIR SURVEILLE 2

MATHS

icam

Le détail et la qualité du Français de vos réponses comptent !!

Exercice 1 :

PARTIE I

L'espace E est rapporté à un repère orthonormal $\left(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. Les points A, B, C et D ont pour coordonnées respectives :

$$(-1\,;0\,;2)\quad,\qquad(3\,;2\,;-4)\quad,\qquad(1\,;-4\,;2)\quad,\qquad(5\,;-2\,;4)$$

On considère les points I, J et K définis par : I est le milieu du segment $[AB]$, K est le milieu du segment $[CD]$ et $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$.

1. Déterminer les coordonnées des points I, J et K
2.
   a. Montrer que les points I, J et K ne sont pas alignés.
   b. Justifier qu'une équation cartésienne du plan (IJK) est :
   $$8x + 9y + 5z - 12 = 0$$
   c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AD) et montrer que le plan (IJK) et la droite (AD) sont sécants en un point L dont on déterminera les coordonnées.
   d. Montrer que :
   $$\overrightarrow{AL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$$

PARTIE II

Plus généralement, dans l'espace E, on considère un tétraèdre $ABCD$ ainsi que les points I, J, K et L définis par I est le milieu du segment $[AB]$, K est le milieu du segment $[CD]$.

$$\overrightarrow{AL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$$

Soit G le barycentre de $(A,3), (B,3), (C,1), (D,1)$.

1. Déterminer les barycentres de $(A,3), (D,1)$ et le barycentre de $(B,3), (C,1)$
2. En associant les points A, B, C et D de deux façons différentes, montrer que G appartient aux droites (IK) et (JL). En déduire que les points I, J, K et L sont coplanaires.

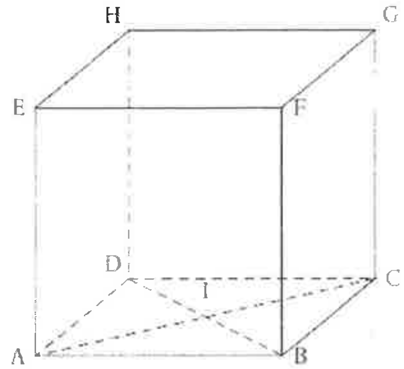
Tournez la page !

Exercice 2 :

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\ )$. Les points A, B et C ont pour coordonnées $A(3\ ;\ -2\ ;2)$, $B(6\ ;1\ ;5)$, $C(6\ ;\ -2\ ;\ -1)$.

1. Démontrer que le triangle ABC est un triangle rectangle.
2. Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation cartésienne : $x+y+z-3=0$
   Prouver que $\mathcal{P}$ est orthogonal à la droite (AB) et passe par le point A.
3. Soit $\mathcal{P}'$ le plan orthogonal à la droite (AC) et passant par le point A. Déterminer une équation cartésienne $\mathcal{P}'$.
4. Déterminer un vecteur directeur de la droite Δ intersection des plan $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$
5. Soit D le point de coordonnées $(0\ ;4\ ;\ -1)$. Prouver que la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC).
6. Déterminer la distance de D à (ABC)

Exercice 3 :



Les questions 1) et 2) sont indépendantes. L'espace est muni d'un repère orthonormal direct. $ABCDEFGH$ est le cube représenté ci-contre. Son arête a pour longueur 1, le centre de la face $ABCD$ est le point I. Aucune figure n'est demandée sur la copie.

1. Déterminer $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA}$.
   a. En déduire l'ensemble $(\mathcal{E})$ des points M de l'espace tels que :
   $$\left(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA}\ \right) \wedge \overrightarrow{BM} = \vec{0}$$
   b. Déterminer l'ensemble $(\mathcal{F})$ des points M tels que $\left(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA}\ \right).\overrightarrow{BM} = 0$
2. On appelle P le barycentre du système $\{(A,2);(C,-1)\}$
   a. Montrer que P est le symétrique de C par rapport A
   b. Soit $(\mathcal{G})$ l'ensemble des points M de l'espace tels que :
   $$\left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\|$$
   Déterminer l'ensemble $(\mathcal{G})$. Montrer que le point A appartient à $(\mathcal{G})$.

Dijols
Fabien
A2

DS de Mathématiques :

note :	observations :
	17/20

Exercice 1 :

1,5

1) $A(-1;0;2)$ $B(3;2;-4)$ $C(1;-4;2)$ $D(5;-2;4)$

• I milieu de [AB] $\Rightarrow$

$I\left(\frac{-1+3}{2};\frac{0+2}{2};\frac{2-4}{2}\right)$ soit $I(1;1;-1)$

• K milieu de [CD] $\Rightarrow$

$K\left(\frac{1+5}{2};\frac{-4-2}{2};\frac{2+4}{2}\right)$ soit $K(3;-3;3)$

• $\vec{BJ} = \frac{1}{4}\vec{BC}$ 1,5

$\vec{OJ} = \vec{OB} + \frac{1}{4}\vec{BC}$ avec $\vec{BC}(-2;-6;6)$

$\vec{OJ}\left(3-\frac{1}{2};2-\frac{3}{2};-4+\frac{3}{2}\right) \Rightarrow \vec{OJ}\left(\frac{5}{2};\frac{1}{2};-\frac{5}{2}\right)$

Soit $J\left(\frac{5}{2};\frac{1}{2};-\frac{5}{2}\right)$ car $O(0;0;0)$.

2) a) $I(1;1;-1)$ $J(\frac{5}{2};\frac{1}{2};-\frac{5}{2})$ $K(3;-3;3)$

Donc $\vec{IJ}(\frac{3}{2};-\frac{1}{2};-\frac{3}{2})$ et $\vec{IK}(2;-4;4)$

Si I, J et K sont alignés, alors $\vec{IJ} = k\vec{IK}$ avec $k \in \mathbb{R}^*$

soit $\begin{cases} \frac{3}{2} = k \times 2 \\ -\frac{1}{2} = k \times (-4) \\ -\frac{3}{2} = k \times 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 3/4 \\ k = \frac{1}{8} \\ k = -3/8 \end{cases}$ 1

k n'a pas de valeur fixe donc $\vec{IJ} \neq k\vec{IK}$ ainsi, les points I; J et K ne sont pas alignés.

b) $\vec{IJ} \wedge \vec{IK}$ est un vecteur normal du plan IJK.

$\vec{IJ} \wedge \vec{IK} \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$ Donc IJK

a pour équation cartésienne 1

$8x + 9y + 5z + d = 0$

avec les coordonnées de I on trouve $d = -12$

Donc $8x + 9y + 5z - 12$ est bien une équation cartésienne de IJK.

c) $\vec{AD}(6;-2;2)$

$(AD) \begin{cases} x = 6t - 1 \\ y = -2t \\ z = 2t + 2 \end{cases}$

Posons $8(6t-1) + 9(-2t) + 5(2t+2) - 12 = 0$

$48t - 8 - 18t + 10t + 10 - 12 = 0$

$40t - 10 = 0$ 1

$t = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$

$L \begin{cases} x = 6 \times \frac{1}{4} - 1 \\ y = -2 \times 1/4 \\ z = 2 \times 1/4 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow L \begin{cases} x = 1/2 \\ y = -1/2 \\ z = 5/2 \end{cases}$

(AD) et (IJK) sont donc sécant en un point $L(\frac{1}{2};-\frac{1}{2};\frac{5}{2})$.

d) $\vec{AL}(\frac{3}{2};-\frac{1}{2};\frac{1}{2})$ et $\vec{AD}(6;-2;2)$

On a $\begin{cases} \frac{1}{4} \times 6 = \frac{3}{2} \\ \frac{1}{4} \times (-2) = -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \times 2 = \frac{1}{2} \end{cases}$ Donc $\vec{AL} = \frac{1}{4}\vec{AD}$

0,5

Partie II :

1). • G_1 : bar((A ; 3) ; (D ; 1))

soit $\vec{AG_1} = \frac{1}{3+1}\vec{AD} = \frac{1}{4}\vec{AD}$

or $\vec{AL} = \frac{1}{4}\vec{AD}$ donc $G_1 = L$

• G_2 : bar((B ; 3) ; (C ; 1)) 1

soit $\vec{BG_2} = \frac{1}{3+1}\vec{BC} = \frac{1}{4}\vec{BC}$

or $\vec{BJ} = \frac{1}{4}\vec{BC}$ donc $G_2 = J$

2). J : bar((B ; 3) ; (C ; 1))
et L : bar((A ; 3) ; (D ; 1))

donc G : bar((A ; 3) ; (B ; 3) ; (C ; 1) ; (D ; 1)) $\in$ (JL)

De plus I : bar((A ; 3) ; (B ; 3)) (car ....
et K : bar((C ; 1) ; (D ; 1))

1,5

donc G $\in$ (IK)

Ainsi (JL) et (IK) se croisent en G, deux droites qui se croisent forment un plan donc I ; J ; K et L sont coplanaires.

Dujols
Fabien

Exercice 2 : 5

1) $\vec{AC}(3; 0; -3)$
$\vec{AB}(3; 3; 3)$

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 3 \times 3 + 0 \times 3 - 3 \times 3 = 0$

donc $(AB) \perp (AC)$

soit ABC est un triangle rectangle. 1

2) $3 - 2 + 2 - 3 = 0$ donc $A \in P$

De plus un vecteur normal a P est $\vec{n}(1; 1; 1)$;
$\vec{AB}(3; 3; 3)$ donc $\vec{n} = \frac{1}{3} \vec{AB}$ soit $\vec{n}$ et $\vec{AB}$ 1
sont colinéaires, donc $\vec{AB}$ est orthogonal a P donc
$(AB) \perp P$.

3) Une équation cartésienne de P' est
$3x - 3z + d = 0$, ce plan passe par A
donc $3 \times 3 - 3 \times 2 + d = 0 \Leftrightarrow d = -3$ 1
Soit $P' : 3x - 3z - 3 = 0$

5

4) $P : x + y + z - 3 = 0$

$P' : 3x - 3z - 3 = 0$

un vecteur normal à P est $\vec{n}(1;1;1)$

// P' est $\vec{m}(3;0;-3)$

Donc un vecteur directeur de Δ est $\vec{n} \wedge \vec{m}$

$\vec{n} \wedge \vec{m} \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$ 0,5

5) $\vec{AB}(3;3;3)$ $\vec{AC}(3;0;-3)$

$D(0;4;-1)$ et $A(3;-2;2)$

Donc $\vec{AD}(-3;6;-3)$

Donc $\vec{AD} \cdot \vec{AB} = -3\times 3 + 3\times 6 - 3\times 3 = 0$ 1

et $\vec{AD} \cdot \vec{AC} = -3\times 3 + 6\times 0 - 3\times(-3) = 0$

Donc $(AD) \perp (AB)$ et $(AD) \perp (AC)$

soit $(AD) \perp (ABC)$

6) $d(D,(ABC)) = \dfrac{|\vec{AD}\cdot(\vec{n}\wedge\vec{m})|}{\|\vec{n}\wedge\vec{m}\|} = \dfrac{|9-36+9|}{\sqrt{9+36+9}} = \dfrac{18}{\sqrt{54}}$

$= \dfrac{18}{9\sqrt{6}}$ 0,5

$\boxed{= \dfrac{2}{\sqrt{6}}}$

6

Exercice 3 : 4,5

1) $\vec{BC} \wedge \vec{BA} = \vec{BF}$ 0,5

a) $(\vec{BC} \wedge \vec{BA}) \wedge \vec{BM} \Leftrightarrow \vec{BF} \wedge \vec{BM}$

On a donc $\vec{BF} \wedge \vec{BM} = 0$

donc $\vec{BF}$ et $\vec{BM}$ sont colinéaires, de plus $B \in \vec{BF}$ et $B \in \vec{BM}$ 1

Donc $(\mathcal{E})$ est l'ensemble des points de la droite (BF).

b) $(\vec{BC} \wedge \vec{BA}) \cdot \vec{BM} = 0 \Leftrightarrow \vec{BF} \cdot \vec{BM} = 0$ 1

Soit $(BM) \perp (BF)$

Donc $(\mathcal{F})$ est l'ensemble des points du plan passant par B et perpendiculaire à (BF), c'est donc le plan (ABC).

2) a) $\vec{AP} = \dfrac{-1}{2-1} \vec{AC} = -\vec{AC}$ 1

Donc P est le symétrique de C par rapport à A.

b) $\|2\vec{MA} - \vec{MC}\| = \|-\vec{MA} + 2\vec{MB} - \vec{MC}\|$

$\|2\vec{MA} - \vec{MA} - \vec{AC}\| = \|-\vec{MB} - \vec{BA} + 2\vec{MB} - \vec{MB} - \vec{BC}\|$ 1

$\|\vec{MA} - \vec{AC}\| = \|-\vec{BA} - \vec{BC}\|$

$\|\vec{MC}\| = \|\vec{AB} + \vec{CB}\|$ car $\|\vec{AB} + \vec{CB}\| = \|\vec{AB} + \vec{BC}\|$ puisque ce sont des normes

$\|\vec{MC}\| = \|\vec{AC}\|$ ⚠ Non (faire un schéma)

Donc $(\mathcal{G})$ est le cercle de centre C et de rayon $[AC]$, ainsi $A \in (\mathcal{G})$.

7