A2 - 2026	Brevet de Technicien Supérieur Blanc	14/04/2023
M A T H S		icam

Le détail et la qualité du Français de vos réponses comptent !!

Exercice 1 :

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) :

$$y'' - y' - 2y = -3e^{-x}$$

où y est une fonction inconnue de la variable x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' la fonction dérivée de y et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $r^2 - r - 2 = 0$.
   b. En déduire les solutions définies sur R de l'équation différentielle (E_0) :
   $$y'' - y' - 2y = 0.$$
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = axe^{-x}$ avec a réel.
   Déterminer a pour que la fonction g soit une solution de (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution de l'équation différentielle (E) vérifiant les conditions initiales $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$?

B. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-x} + xe^{-x}$.

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal.

1. a. Calculer, en justifiant, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
   b. Donner une interprétation graphique du résultat précédent.
2. Après avoir justifié que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, calculer $f'(x)$
3. a. Étudier sur $\mathbb{R}$ le signe de $f'(x)$.
   b. Dresser le tableau de variations de la fonction f .

C. Étude locale

On rappelle que la fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{-x} + xe^{-x}$$

$e^{-x} + xe^{-x}$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal et on appelle $\mathcal{T}$ la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

1. Calculer le développement limité à l'ordre 2 de fonction f au voisinage de zéro.
2. Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$.
3. Étudier la position relative, au voisinage du point d'abscisse 0, de la courbe $\mathcal{C}$ et de la tangente $\mathcal{T}$

D. Calcul intégral

On note $I = \int_0^{\ln 3} f(x)\,dx$ où f est la fonction définie dans la partie B.

1. Vérifier que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par
$$F(x) = (-2 - x)e^{-x}$$
est une primitive de la fonction f .
2. Calculer I de façon exacte.
3. Donner la valeur approchée de I arrondie à 10^{-3}.
Donner une interprétation graphique du nombre I.

Exercice 2 :

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Dans cet exercice, sauf mention du contraire, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-4}.
Une entreprise de métallurgie conçoit des pièces pour l'industrie aéronautique.

A. Loi exponentielle

Cette entreprise fabrique un certain type de plaques métalliques destinées à la conception des carlingues d'avion. Une machine permet de découper ces plaques métalliques. de manière autonome. Cette machine nécessite d'être étalonnée régulièrement. On considère que la durée de bon fonctionnement, exprimée en heure, entre deux étalonnages, est modélisée par une variable aléatoire T de loi exponentielle de paramètre $\lambda = 2 \times 10^{-4}$.

1. Déterminer $P(T \leq 2000)$.
2. Déterminer la probabilité que la durée de bon fonctionnement de cette machine dépasse 10000 heures.
3. Calculer $E(T)$ puis interpréter ce nombre dans le contexte.

B. Loi binomiale et approximation par une loi normale

L'entreprise fabrique également des billes d'acier destinées à l'élaboration de roulements à billes. On suppose que 0,5% des billes fabriquées en usine présentent un défaut de fabrication. On prélève au hasard un échantillon de 1000 billes dans l'ensemble de la production (la production est assez importante pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à des tirages avec remise de 1000 billes).

On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre de billes qui présentent un défaut de fabrication.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. a. Calculer $p(X = 0)$, donner le résultat en pourcentage. Interpréter le résultat obtenu.

   b. En déduire la probabilité qu'au moins une bille de l'échantillon présente un défaut de fabrication.
3. On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire X par une loi normale. On note Y une variable aléatoire suivant cette loi normale.

   Calculer, en justifiant, les valeurs des paramètres de cette loi normale.
4. Déterminer, à l'aide de cette approximation, la probabilité qu'il y ait au plus 7 billes présentant un défaut de fabrication dans le lot de 1000 billes, c'est-à-dire calculer $P(Y \leq 7{,}5)$.

C. Test d'hypothèse

On se propose de construire un test d'hypothèse bilatéral pour contrôler la moyenne μ de l'ensemble des diamètres, en millimètre, des billes constituant la prochaine livraison à effectuer. On note Z la variable aléatoire qui, à chaque bille prélevée au hasard dans la livraison, associe son diamètre en millimètre. La variable aléatoire Z suit une loi normale de moyenne inconnue μ et d'écart type $\sigma = 0{,}15$.

On désigne par $\overline{Z}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon aléatoire de 100 billes prélevées dans la livraison, associe la moyenne des diamètres de ces billes. La livraison est suffisamment importante pour que l'on puisse assimiler ces prélèvements à des tirages avec remise.

L'hypothèse nulle H_0 est : « $\mu = 55$ », la livraison est dite conforme pour le diamètre.

L'hypothèse alternative H_1 est : « $\mu \neq 55$ ».

Le seuil de signification du test est fixé à 5%.

1. Sous l'hypothèse nulle H_0, déterminer la loi de la variable aléatoire $\overline{Z}$.

On veut déterminer, sous l'hypothèse nulle H_0, le réel positif h tel que :

$$P\,(55 - h \leq Z \leq 55 + h) = 0{,}95.$$

2. Déterminer la valeur approchée de h arrondie au centième.
3. Énoncer la règle de décision permettant d'utiliser ce test.
4. On prélève un échantillon aléatoire de 100 billes dans la livraison. La moyenne des diamètres des 100 billes de cet échantillon est $\overline{z} = 55{,}06\ mm$.

   Quelle est la conclusion du test ?