Dijols
Fabien
A2

BTS blanc de Mathématiques

note:	observations:
	20/28

Excercice 1:

A)

1) a) $r^2 - r - 2 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$
$= (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2)$
$= 9$

$r_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $r_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

1

$= \frac{1-3}{2}$ $= \frac{1+3}{2}$

$\boxed{r_1 = -1}$ $\boxed{r_2 = 2}$

Les solutions de l'équations $r^2 - r - 2 = 0$ sont $r_1 = -1$ et $r_2 = 2$.

b) Les solutions de l'équation différentielle (E_0) sont donc $S_1 = Ae^{-1x}$ et $S_2 = Be^{2x}$

1

2) $g(x) = axe^{-x}$

$g'(x) = ae^{-x} - axe^{-x}$

$g''(x) = -ae^{-x} - ae^{-x} + axe^{-x}$

$g''(x) - g'(x) - 2g(x) = -3e^{-x}$

$\Leftrightarrow -ae^{-x} - ae^{-x} + axe^{-x} - ae^{-x} + axe^{-x} - 2axe^{-x} = -3e^{-x}$

$\Leftrightarrow -3a\,e^{-x} = -3e^{-x}$ 1

$\Leftrightarrow \boxed{a = 1}$

3) $S: f(x) = xe^{-x} + Ae^{-x} + Be^{2x}$ (

L'ensemble des solutions de (E) est la fonction définie par $f(x) = xe^{-x} + Ae^{-x} + Be^{2x}$.

4) $f'(x) = e^{-x} + xe^{-x} - Ae^{-x} + 2Be^{2x}$

On a donc

$\begin{cases} A + B = 1 \\ 1 - A + 2B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + 3B = 1 \\ A + B = 1 \end{cases}$

Soit $\begin{cases} B = 0 \\ A = 1 \end{cases}$ 1

D'où $S : f(x) = xe^{-x} + e^{-x}$

B) 1) a)

- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ donc par produit et par somme

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} + xe^{-x} = 0$

0,5

- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = \infty$ donc par produit

$\lim\limits_{x \to -\infty} xe^{-x} = -\infty$ et par ~~croissances comparées~~

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} + xe^{-x} = -\infty$

b) La courbe de f admet une asymptote horizontale de la forme $y = 0$. 1

2) f est une somme de fonctions dérivables donc elle est elle même dérivable.

$f(x) = e^{-x} + xe^{-x}$

$f'(x) = -e^{-x} + e^{-x} - xe^{-x}$ 1

$= -xe^{-x}$

3) a) $e^{-x} > 0$ sur $\mathbb{R}$ donc $f'(x)$ est du signe de $-x$ avec $-x > 0$ sur $]-\infty ; 0[$ 1

puis $-x < 0$ sur $]0 ; +\infty[$.

b)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

1

$$f(0) = e^0 + 0e^0$$
$$= 1$$

c) 1) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + x^n \varepsilon(x)$

Ainsi on a DL02 de e^{-x} :

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x)$$

Soit DL02 de f :

1

$$e^{-x} + xe^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} + x - x^2 + x^2 \varepsilon(x)$$

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x)$$

2) La tangente en 0 de $f(x)$ est la partie affine de son développement limité donc on a :

$\tau : y(x) = 1$ 1

Dijols Fabien A2

3) D'après le tableau de variation de f, $\mathscr{C}$ est au dessous de 1 sur $]-\infty;0[$ ainsi que sur $]0;+\infty[$
Donc la tangente à $\mathscr{C}$ en 0 est au dessus de $\mathscr{C}$ sauf en 0, où les deux courbes sont confondues. 1

D) 1)

$F(x) = (-2-x)e^{-x}$

posons $u = -2-x$ et $u' = -1$
$v = e^{-x}$ et $v' = -e^{-x}$

soit $F'(x) = u'v + uv'$
$= -e^{-x} - (-2-x)e^{-x}$
$= -e^{-x} + 2e^{-x} + xe^{-x}$ 1
$= e^{-x} + xe^{-x}$

soit $F'(x) = f(x)$ donc F est bien une primitive de f.

2) $I = \int_0^{\ln(3)} f(x)\,dx$

$= \Big[(-2-x)e^{-x}\Big]_0^{\ln(3)}$

$= (-2-\ln 3)e^{-\cancel{x}} - (-2)e^0$ 0,5
$= (-2-\ln(3))e^{-\cancel{x}} + 2$ = ...

3) $I \simeq 1,846$ selon la calculatrice. ✗

Cela signifie qu'il y a 1,846 unités de surfaces comprises entre la courbe et l'axe des abscisses sur l'intervalle $[0 ; \ln 3]$

Exercice 2 :

A) 1) $P(T \leq 2000) = \int_0^{2000} 2\times10^{-4} e^{-2\times10^{-4} T}\, dT$

$= \left[-2\times10^{-4} e^{-2\times10^{-4} T} \right]_0^{2000}$

$= -2\times10^{-4} e^{-4\times10^{-1}} + 2\times10^{-4}$ 0,5

=

2) $P(T > 10\,000)$

3) $E(T) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2\times10^{-4}} = 5000$ 1

Cela signifie que l'on peut espérer avoir une machine fonctionnelle pendant 5000 heures.

B) 1) La variable aléatoire X suit une épreuve de Bernoulli, soit la bille est conforme, soit elle ne l'est pas. De plus cette épreuve est répété n fois de façon indépendante car la production est assez importante pour considerer qu'on fait un tirage avec remises. On a donc une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes les unes des autres, ce qui correspond bien à une loi binomiale. de paramètres ? 0,5

2) a) $p(X = 0) = (1 - 0,005)^{1000}$

$= 6,7 \times 10^{-3}$

$\simeq 0,6654\ \%$ 1

Il y a 0,6654 % de chance de n'avoir aucune billes défectueuses.

b) $p(X \geq 1) = 1 - p(X=0)$

$= 99,3346\ \%$ 1

La probabilité qu'au moins une bille ai un défaut est de 99,3346 %.

3) On avait $\mathcal{B}(1000 ; 0,005)$

$\lambda = n \times p = 5$ 0,5

$\sigma = \dfrac{(1-p)^n}{p} = 1{,}3308$

Soit $\mathcal{N}(5\,;\,1{,}3308)$

4) $P(Y \leq 7{,}5) \Rightarrow$ NormCD $(-1\,;\,7{,}5\,;\,1{,}3308\,;\,5)$

Donc d'après la calculatrice :

$P(Y \leq 7{,}5) = 0{,}9698$ soit 96,98%

La probabilité qu'il y ai au plus 7 billes défectueuse est de 96,98% !

C. 1) Z suit la loi Binomiale :

$\mathcal{B}(100\,;\,0{,}005)$

2) $P(55 - h \leq Z \leq 55 + h) = 0{,}95$

$\Leftrightarrow$ InVNormCD $(0\,;\,0{,}95\,;\,0{,}15\,;\,0)$

Dons selon la calculatrice, $h = 0{,}29$ au centième.

3) Si la moyenne est comprise entre 54,71 et 55,29 alors on accepte H_0 et on rejete H_1, sinon on rejete H_0 et on garde H_1.

4) $54{,}71 < 55{,}06 < 55{,}29$ donc on accepte H_0, la moyenne des diamètres est conforme au seuil de 95%.

0,5

8/8