A2 - 2026	DEVOIR SURVEILLE 3	21/01/2023
MATHS		icam

Le détail et la qualité du Français de vos réponses comptent !!

Exercice 1 :

Partie A :

On considère l'équation différentielle (E) :

$$y'' - 3y' - 4y = -5e^{-x}$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' la fonction dérivée de y et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle homogène associée à (E)
2. Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (ax+b)e^{-x}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$
   Déterminer les valeurs de a et b telles que la fonction h soit une solution particulière de l'équation différentielle (E) avec $h(1) = e^{-1}$.
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = 2$ et $f'(0) = -1$.

Partie B :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+2)e^{-x}$

1. Déterminer (en justifiant correctement) les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
2. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
3. Déterminer les variations de la fonction f puis sa convexité.
4. Déterminer le développement limité à l'ordre 3, au voisinage de 0 de la fonction f
5. En déduire une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
6. Étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{T}$ au voisinage du point d'abscisse 0.

Tournez la page !

Partie C :

On note $I = \int_0^{0,6} f(x)\, dx$.

1. A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que $I = 3 - 3{,}6e^{-0,6}$
2. Donner une interprétation graphique du nombre.

Exercice 2 :

Soit $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par : $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4-y^2}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$

Exercice 3 :

Soit $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$; définie par $f(x,y) = x^3 + y^3 - 6(x^2 - y^2)$

1. Déterminer les dérivées partielles d'ordre 1
2. Déterminer l'ensemble des points critiques de la fonction f
3. Déterminer les dérivées partielles d'ordre 2 de la fonction f
4. Parmi les points critiques, y-a-t-il des extremum locaux ? Si oui, déterminer leur nature.
5. Parmi les extremum locaux certains sont-ils globaux ? justifier.

Dijols
Fabien
A 2

DS de Mathématiques

17,5/20

Exercice 1 :

Partie A :

1) Posons $x^2 - 3x - 4 = 0$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-4)$ $\quad \sqrt{\Delta} = \pm 5$

$= 9 + 16$

$= 25$

D'où $r_1 = \dfrac{3-5}{2}$ $\quad r_2 = \dfrac{3+5}{2}$

$= -1$ $\quad = 4$

1

D'où $f_H(x) = Ae^{-x} + Be^{4x}$

2) $h(x) = (ax+b)e^{-x}$

$h'(x) = a e^{-x} - (ax+b)e^{-x} = (-ax+b+a)e^{-x}$

$h''(x) = -a e^{-x} - (-ax+b+a)e^{-x}$

$= (ax - b - 2a)e^{-x}$

On a donc :

$(ax - b - 2a)e^{-x} - 3(-ax + b + a)e^{-x} - 4(ax + b)e^{-x} = -5e^{-x}$

$\Leftrightarrow (\cancel{ax} - b - 2a + \cancel{3ax} - 3b - 3a - \cancel{4ax} - 4b)e^{-x} = -5e^{-x}$

$\Leftrightarrow (-5a - 8b)e^{-x} = -5e^{-x}$

soit $-5a - 8b = -5$

prenons $a = 1$ et $b = 0$

alors on a bien $h(1) = e^{-1}$

1

3) Ainsi on a :

$f_a(x) = Ae^{-x} + Be^{4x} + xe^{-x}$

1

4) $f(0) = A + B = 2$

$f'(x) = -Ae^{-x} + 4Be^{4x} + e^{-x} - xe^{-x}$

$f'(0) = -A + 4B + 1 = -1$

Soit $\begin{cases} A + B = 2 \\ -A + 4B = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5B = 0 \\ A + B = 2 \end{cases}$

1

$\Leftrightarrow \begin{cases} B = 0 \\ A = 2 \end{cases}$

Donc $f(x) = (x + 2)e^{-x}$

Partie B :

1) Par croissance comparé, e^{-x} tend plus vite que $(x + 2)$

donc $\lim_{x \to \infty} (x + 2)e^{-x} = \lim_{x \to \infty} e^{-x} = 0$

0,5

De même $\lim_{x \to -\infty} (x + 2)e^{-x} = \lim_{x \to -\infty} e^{-x} = \infty$

X

2) $f(x) = (x + 2)e^{-x}$

$f'(x) = e^{-x} - (x + 2)e^{-x}$

$= (-x - 1)e^{-x}$

1

$f''(x) = -e^{-x} - (-x - 1)e^{-x}$

$= xe^{-x}$

3) • posons $(-x - 1)e^{-x} \geq 0$; $e^{-x} > 0$ sur $\mathbb{R}$

donc $\Leftrightarrow -x - 1 \geq 0$

$-x \geq 1$

$x \leq -1$

1

Donc f est croissante sur $]-\infty ; 1]$ puis décroissante.

• posons $xe^{-x} \geq 0$; $e^{-x} > 0$ sur $\mathbb{R}$

donc $\Leftrightarrow x \geq 0$

Donc f est concave sur $]-\infty ; 0]$ puis convexe.

4) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon(x)$

Donc $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon(x)$

Soit $f(x) = (x+2)\left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + x^3 \varepsilon(x)$

$= x - \cancel{x^2} + \frac{x^3}{2} + 2 - 2x + \cancel{x^2} - \frac{x^3}{3} + x^3 \varepsilon(x)$

$= \frac{x^3}{6} - x + 2 + x^3 \varepsilon(x)$ 1

5) D'où une équation de la Tangente en O :

$T(x) = -x + 2$ 1

6) posons $f(x) - T(x) = \frac{x^3}{6} = x \times \frac{1}{6} x^2$

Si $x \times \frac{1}{6} x^2 > 0$ alors $\mathcal{C}$ est au dessus de T sinon c'est l'inverse. 1

$\frac{1}{6} x^2 \geq 0$ sur $\mathbb{R}$ donc $\frac{x^3}{6}$ est du signe de x

Ainsi $\mathcal{C}$ est au dessus de $\mathcal{T}$ sur $[0 ; +\infty[$ et au dessous de $\mathcal{T}$ sur $]-\infty ; 0]$. En O ; $\mathcal{C}$ et $\mathcal{T}$ sont confondues.

4

Partie C :

Dijols Fabien

$$I = \int_0^{0,6} f(x)\,dx = \int_0^{0,6} (x+2)e^{-x}\,dx$$

1) posons $u = x+2$ et $v' = e^{-x}$

$u' = 1$ $\qquad v = -e^{-x}$

Par IPP on a : $\int_0^{0,6} uv' = [uv]_0^{0,6} - \int_0^{0,6} u'v$

Soit $\int_0^{0,6} (x+2)e^{-x}\,dx = \left[-(x+2)e^{-x}\right]_0^{0,6} - \int_0^{0,6} -e^{-x}\,dx$

$= \left[(-x-2)e^{-x}\right]_0^{0,6} - \left[e^{-x}\right]_0^{0,6}$

$= \left[(-x-3)e^{-x}\right]_0^{0,6}$

1

$= -3,6e^{-0,6} - (-3)$

$\boxed{= 3 - 3,6e^{-0,6}}$ CQFD

2) Ce nombre correspond au nombre d'unité d'aire compris entre la courbe de f est l'axe des abscisses sur l'intervalle $[0;0,6]$.

0,5

5

Excercice 2 :

$\frac{x^4 - y^2}{x^2+y^2}$ est une somme et un quotient de fonction continue sur $\mathbb{R}_2^*$ donc cette fonction est continue sur son intervalle de définition.

3

- Cherchons si elle est continue en $(0;0)$.

Approchons f en $(0;y)$

On a $f(0;y) = -\frac{y^2}{y^2} = \boxed{-1}$

Or $f(0;0) = 0$

Donc lorsque y tend vers 0 ; $f(0;y)$ devrait tendre vers 0.

Il y a donc une discontinuité en $(0;0)$.

Excercice 3 :

1) $\frac{\partial f}{\partial x}(x;y) = 3x^2 - 12x$

1

$\frac{\partial f}{\partial y}(x;y) = 3y^2 + 12y$

2) posons $\begin{cases} 3x^2 - 12x = 0 \\ 3y^2 + 12y = 0 \end{cases}$ $\Delta_1 = (-12)^2 = 144$ $\sqrt{\Delta} = \pm 12$

$\Delta_2 = (12)^2 = 144$ $\sqrt{\Delta} = \pm 12$

$x_1 = \frac{12-12}{6} = 0$ $x_2 = \frac{24}{6} = 4$ $y_1 = \frac{-12-12}{6} = -4$ $y_2 = 0$

Les points critiques sont donc :

$(0;-4)$ $(4;-4)$

$(0;0)$ $(4;0)$

1

3) $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x;y) = 6x - 12$ $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x;y) = 6y + 12$

1

$\frac{\partial^2 f}{dx\, dy}(x;y) = 0$

4) - Approche en $(0;-4)$

$r = -12$ $s = 0$ $t = -12$

$\Delta = s^2 - rt = -(-12)\times(-12) = -144 < 0$

Donc $(0;-4)$ n'est pas un extremum.

- Approche en $(0;0)$

$r = -12$ $s = 0$ $t = 12$

$\Delta = -(-12)\times 12 = 144 \geq 0$

Donc $(0;0)$ est un maximum car $r \leq 0$

- Approche en $(4;-4)$

$r = 12$ $s = 0$ $t = -12$

$\Delta = 144 > 0$ et $r \geq 0$ donc $(4;-4)$ est un minimum.

• Approche en $(4;0)$

$r = 12 \quad s = 0 \quad t = 12$

$\Delta = -12 \times 12 = -144$

Donc $(4;0)$ n'est pas un extremum.

0,5

Ainsi on a : $(0;0) \Rightarrow$ maximum

$(4;-4) \Rightarrow$ minimum

5) $f(0;0) = 0$

donc si $(0;0)$ est un maximum global alors

$f(x;y) \leq 0$

Bonne analyse

Or pour $(1;1)$ on a :

$f(1;1) = 1^3 + 1^3 - 6(1^2 - 1^2)$

$= 2 - 6(0)$

$= 2 > 0$

Donc $(0;0)$ n'est pas un maximum global.

$f(4;-4) = 0$

Donc si $(4;-4)$ est un minimum global, alors $f(x;y) \geq 0$

Or pour $(1;0)$ on a

$f(1;0) = 1 + 0 - 6(1 - 0) = 1 - 6 = -5 < 0$

Donc $(4;-4)$ n'est pas un minimum global.

$(0;0)$ et $(4;-4)$ sont seulement des extremums locaux.