Généralités sur les vecteurs

Ex 1 : *Relation de Chasles*

Simplifier au maximum les relations suivantes

$\vec{u}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{EF}-\overrightarrow{ED}$

Ex 2 : *Parallélisme*

Soit ABC un triangle.

1) Placer le point E tel que $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

2) Placer le point F tel que $\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{AC}$.

3) Démontrer que les droites (CE) et (FB) sont parallèles.

Ex 3 : *Alignement*

$ABCD$ est un parallélogramme.

1) Placer les points E et F tels que $\overrightarrow{DE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DF}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{DA}$.

2) Placer les points G et H tels que $BAEG$ et $BAFH$ soient des parallélogrammes.

3) Démontrer que $\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{DE}$

4) En déduire que les points C , G et H sont alignés.

Ex 4 :

Associer à chaque égalité vectorielle la phrase correspondante et, dans chaque cas, illustrer par une figure :

1. $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$	A. $ABCD$ est un parallélogramme
2. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$	B. $ABDC$ est un parallélogramme
3. $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}$	C. D est le milieu de $[AB]$
4. $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$	D. $ADBC$ est un parallélogramme

Ex 5 :

Simplifier au maximum l'écriture des vecteurs suivants :

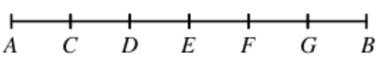
1) $\vec{u}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB}$

2) $\vec{v}=\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{EF}-\overrightarrow{ED}$

3) $\vec{w}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}$

Ex 6 :

Le segment [AB] est divisé en 6 parties de même longueur.



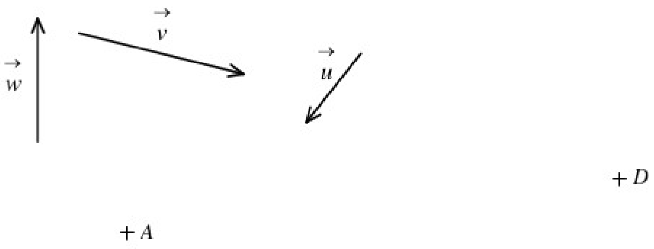
Compléter les relations suivantes par :

- la lettre qui convient :	- le nombre qui convient :
1) $\overrightarrow{E...}$ ...$=-2\overrightarrow{EF}$	4) $\overrightarrow{CE}=...\overrightarrow{AB}$
2) $\overrightarrow{C...}+\overrightarrow{...G}=\vec{0}$	5) $\overrightarrow{AD}=...\overrightarrow{BF}$
3) $\overrightarrow{AB}=\frac{3}{2}\overrightarrow{A...}$	6) $\overrightarrow{DE}=...\overrightarrow{BF}$

Ex 7 :

1) Construire les points B et C tels que $\overrightarrow{AB}=\vec{w}+\vec{u}$ et $\overrightarrow{AC}=\vec{w}-\vec{u}$.

2) Construire les points E et F tels que $\overrightarrow{DE}=\vec{w}-2\vec{v}$ et $\overrightarrow{DF}=\frac{-1}{2}\vec{w}+\vec{u}$.



Ex 8 :

Soit ABC un triangle.

Simplifier au maximum l'écriture des vecteurs suivants :

$\vec{u}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{CB}$

$\vec{v}=2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{AB}$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ? Justifier.

Ex 9 :

Soit A et B deux points tels que AB =5 cm.

Soit M le point défini par : $-5\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=\vec{0}$.

Déterminer le vecteur $\overrightarrow{AM}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et construire le point M

Ex 10 :

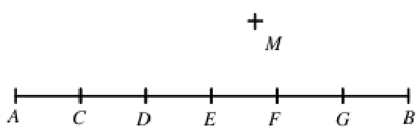
ABC est un triangle avec $AB=8$ cm.

1) Placer le point E tel que : $3\overrightarrow{EA}+5\overrightarrow{EB}=\vec{0}$. (Justifier la position de E à l'aide d'un calcul vectoriel)

2) Démontrer que $3\overrightarrow{CA}+5\overrightarrow{CB}=8\overrightarrow{CE}$.

Ex 11 :

Le segment [AB] est divisé en 6 parties égales. M est un point quelconque.



Compléter les relations suivantes par :

- la lettre qui convient :	-le nombre qui convient :
1) $\overrightarrow{C...}+\overrightarrow{...G}=\vec{0}$	3) $\overrightarrow{AD}=...\overrightarrow{BF}$
2) $\overrightarrow{AB}=\frac{3}{2}\overrightarrow{A...}$	4) $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MB}=...\overrightarrow{MF}$

Barycentre

Ex 12 :

Montrer, pour $a+b\neq 0$, l'équivalence des trois relations :

- $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}$
- $\overrightarrow{AG}=\dfrac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$

– Quel que soit le point M : $\overrightarrow{MG}=\dfrac{1}{a+b}\left(a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}\right)$

Que peut-on dire si $a+b=0$?
Montrer que la troisième relation peut toujours s'écrire :
$\overrightarrow{MG}=(1-t)\overrightarrow{MA}+t\overrightarrow{MB}$ où $t\in\mathbb{R}$

Ex 13 :

Soit A et B distincts, et P vérifiant la relation : $\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AB}$ avec k réel quelconque.
Déterminer α et β tels que P soit le barycentre de (A, α) et (B, β).
Déterminer suivant les valeurs de k la position de P .

Ex 14 :
Faire une figure et construire les barycentres :
– G de (A, 3) et (B, 1)
– K de (A, 2) et (B, −3)
– I de (A, 500) et (B, 500)

Ex 15 :

A, B et C sont trois points non alignés du plan.
Construire le barycentre de (A, −1), (B, 1) et (C, 2).

Ex 16 :

On se place dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
Soit A(2; −1; 4), B(−1; 3; −1) et C(0; 1; 2).
Calculer les coordonnées du barycentre G de (A, 1), (B, 1) et (C, 2).
Soit I le milieu de [AB]. Prouver que G est le milieu de [IC].

Ex 17 :

ABC est un triangle.
1. G est le barycentre de (A, 1)(B, 2)(C, 3). Construire le point G. (Argumenter)
2. G' est le barycentre de (A, 1)(B, 3)(C, -3). Construire le point G'. (Argumenter)
3. Démontrer que (AG') est parallèle à (BC).

Ex 18 :

B est le milieu de [AC]. Démontrer que le barycentre de (A, 1)(C, 3) est confondu avec celui de (B, 2)(C, 2).

Ex 19 :

ABC est un triangle. On note G le barycentre de (A, 2), (B, 1) et (C,1).
Le but de l'exercice est de déterminer la position précise du point G.
1) Soit I le milieu de [BC]. Montrer que $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{GI}$.
2) En déduire que G est le barycentre de A et I munis de coefficients que l'on précisera.
3) Conclure.

Ex 20 :

1) Placer dans un repère les points A(1, 2), B(-3, 4) et C(-2, 5).
Soit G le barycentre des points pondérés (A, 3), (B, 2) et (C, -4).
2) Quelles sont les coordonnées de G ? Placer G.
3) La droite (BG) passe-t-elle par l'origine du repère ?
(Justifier)

Ex 21 :

Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, placer les points A(2, 1), B(-1, 5), C(5, 7) et $G\left(1,\dfrac{5}{2}\right)$

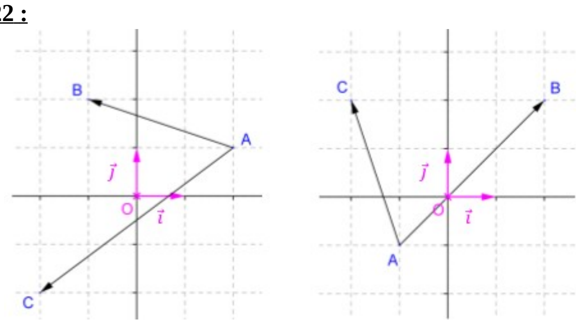
1) Déterminer les coordonnées de l'isobarycentre I des points B et C.

2) Déterminer les coordonnées du centre de gravité H du triangle ABC.

3) Existe-t-il un réel k tel que G soit barycentre de (A, 1) et (B, k) ? Justifier.

Produit scalaire

Ex 22 :



1) Dans chacun des cas calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

2) En déduire $\widehat{BAC}$

Ex 23 :

ABC est un triangle équilatéral de côté 5 cm. I est le milieu de [BC].
Calculer les produits scalaires suivants :

1) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ 2) $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CI}$ 3) $(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AI}$

Ex 24 :

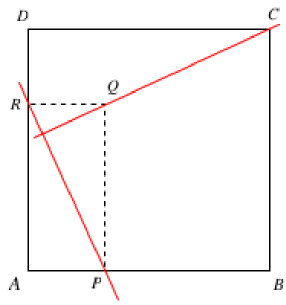
ABC est un triangle dans lequel AB = 2 et AC = 3.
De plus $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4$.

Ce triangle est-il rectangle en A ? (Si oui, préciser en quel sommet)

Ex 25 :

Soit un carré ABCD. On construit un rectangle APQR tel que :
· P et R sont sur les côtés [AB] et [AD] du carré
· AP = DR

Le problème a pour objet de montrer que les droites (CQ) et (PR) sont perpendiculaires.



1) Justifier que :

$\overrightarrow{CQ}\cdot\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{CQ}\cdot(\overrightarrow{AR}-\overrightarrow{AP})$

2) En déduire que les droites (CQ) et (PR) sont perpendiculaires.

Ex 26 :

MNPQ est un carré avec MN = 6. I est le centre du carré.

Calculer les produits scalaires suivants :

$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{QP}$ $\quad \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{PN}$ $\quad \overrightarrow{IN} \cdot \overrightarrow{IP}$ $\quad \overrightarrow{QI} \cdot \overrightarrow{NI}$

Ex 27 :

Les vecteurs $\vec{u}$ (4876 ; -4898873) et $\vec{v}$ (317019173 ; 315539) sont-ils orthogonaux ?

Ex 28 :

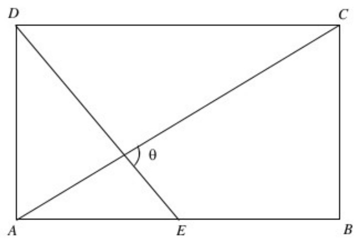
Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

On donne $M(2;\lambda)$, $A(1;3)$ et $L(4;3-\lambda)$.

Déterminer le(s) réel(s) λ tel que le triangle MAL soit rectangle en A.

Ex 29 :

ABCD est un rectangle tel que AD = 3 et AB = 5.
E est le milieu de [AB].



1) Calculer les longueurs AC et DE.

2) En exprimant chacun des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DE}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DE}$.

3) En déduire la valeur de l'angle θ en degrés à 0,01 près.

Produit vectoriel

Ex 30 :

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de sens direct.

On donne V_1 (1;2;1), V_2 (3; −1; 0) et V_3 (2; −3; 1). Déterminer les coordonnées des vecteurs suivants :

1) $V_1 \wedge V_2$

2) $V_2 \wedge V_3$

3) $V_1 \wedge (V_2 \wedge V_3)$

4) $(V_1 \wedge V_2) \wedge V_3$

5) Que peut-on en déduire ?

Ex 31 :

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de sens direct.

On donne les points A(1; 2; 1), B(2; 0; 1) et C(1; 1; −1).

1) Calculer le produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

2) En déduire l'aire du triangle ABC.

3) Calculer AB et AC .

4) Calculer l'angle $\widehat{BAC}$.

Ex 32 :

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de sens direct.

On donne $\vec{u}$ (2;0;0), $\vec{v}$ (3;1;0) et $\vec{w}$ (1;2;4).

1) Calculer $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$.

2) Calculer $(\vec{u} \cdot \vec{w})\,\vec{v}$.

3) Calculer $(\vec{u} \cdot \vec{v})\,\vec{w}$.

4) Calculer $(\vec{u} \cdot \vec{w})\,\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\,\vec{w}$

5) Conclusion ? (Formule du double produit vectoriel)

Ex 33 :

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de sens direct.

Déterminer un vecteur unitaire orthogonal aux vecteurs $\vec{u}$ (3; 1; −2) et $\vec{v}$ (2; 1; 4)