S7 – Construction Mécanique

CHAPITRE 2 :

Mécanique appliquée

S72

S724 – Cinématique du solide en translation ou en rotation autour d'un axe fixe :

- Torseur cinématique associé au mouvement
- Champs de vitesses

S725 – Cinématique des ensembles solides

- Composition de mouvements

S726 – Cinématique des mouvements plans

- Equiprojectivité du champ des vitesses
- Centre instantané de rotation

La cinématique est l'étude des mouvements des corps ; Elle s'appuie sur les notions de mouvement, déplacement, trajectoire, vitesse et accélération. La cinématique permet le dimensionnement des pièces d'un mécanisme et est nécessaire dans l'étude dynamique d'un système. En cinématique, les solides étudiés sont supposés indéformables. Ils sont définis comme un ensemble de point dont les distances respectives restent inchangées au cours du temps.

I- GENERALITES ET TRAJECTOIRES

I.1- Référentiel

Un référentiel est l'addition ou la combinaison d'un repère de référence (ex: $\left(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z}\right)$) et d'un repère de temps.

I.2- Mouvement absolu et mouvement relatif

Le mouvement d'un solide est dit ***absolu*** s'il est défini par rapport à un référentiel absolu (ou galiléen), c'est-à-dire un référentiel au repos absolu dans l'univers.

En mécanique, nous considérerons la Terre comme repère absolu.

Le mouvement d'un solide est dit ***relatif*** s'il est défini par rapport à un référentiel relatif (qui est en mouvement par rapport à un repère absolu).

I.3- Principaux mouvements plans de solides.

Un solide exécute un mouvement plan lorsque tous les points qui le constituent se déplacent dans des plans parallèles entre eux. Pour simplifier l'étude, nous considérerons alors le solide plan.

I.4- Trajectoire.

Notion de points coïncidents

Les solides (1) et (2) sont en mouvement entre eux et en mouvement par rapport au solide de référence (0). A un instant t quelconque, le point géométrique M peut être considéré comme lié, ou appartenant, à l'un quelconque des trois solides (0, 1 ou 2) et suivre le mouvement du solide auquel il est lié.

Trois cas possibles: M lié à 1 (M_1), M lié à 2 (M_2) et M lié à 0 (M_0).

Les points M_1, M_2 et M_0 sont par définition des points coïncidents à l'instant t.
A partir de la notion de points coïncidents, il est facile de différencier les grandeurs cinématiques (trajectoires, vitesses, ect...) des points de chacun des solides.

Trajectoire d'un point

La trajectoire d'un point M est la courbe géométrique décrite au cours du temps par les positons successives de ce point dans le repère de référence $\Re$.

I.5- Vecteur position et vecteur déplacement

Vecteur position

$\Re = (O, \vec{x}, \vec{y})$ est un repère de référence lié au solide de référence S.

Le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ définit la position, à l'instant t, du point M dans son mouvement par rapport au repère de référence $\Re$.

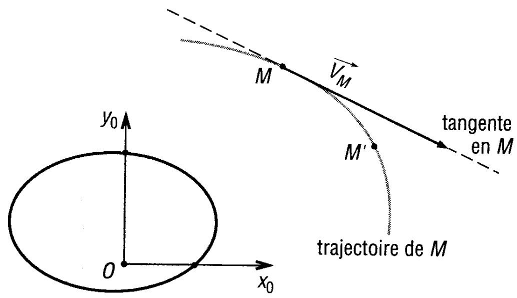
Vecteur déplacement

Si M_1 est la position du point M à l'instant t_1 et M_2 la position de M à l'instant t_2, le vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$ définit le déplacement de M entre t_1 et t_2 pendant la durée (t_2-t_1).

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_1O} + \overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$$

I.6- Vitesse et accélération

Vecteur vitesse $\vec{V}_M$



Si $\overrightarrow{MM'}$ définit le déplacement du point M pendant la durée (t'-t = Δt), on peut définir la vitesse moyenne de M à M' par:

$$\vec{V}_{moy} = \frac{\overrightarrow{MM'}}{(t'-t)} = \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}$$

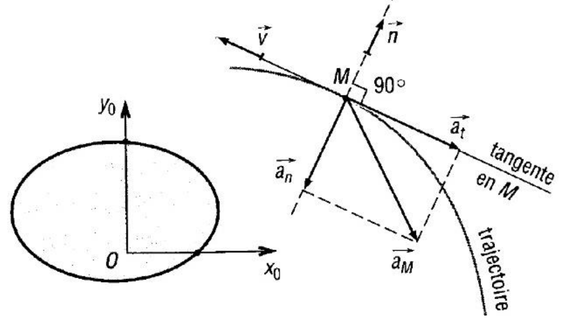
Si on fait tendre t' vers t ou Δt vers 0 (« passage à la limite »), $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}$ tend vers $\Delta\overrightarrow{OM}$ et la vitesse moyenne tend vers la vitesse instantanée $\vec{V}_M$.

$$\vec{V}_M = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}\right) = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta\overrightarrow{OM}}{\Delta t}\right) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

Remarques:

- La vitesse $\vec{V}_M$ est toujours tangente en M à la trajectoire.
- La vitesse $\vec{V}_M$ du point M est la dérivée du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ par rapport au temps.

Vecteur accélération $\vec{a}_M$



L'accélération $\vec{a}_M$ s'obtient en dérivant la vitesse $\vec{V}_M$ par rapport au temps.

$$\vec{a}_M = \frac{d\vec{V}_M}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$$

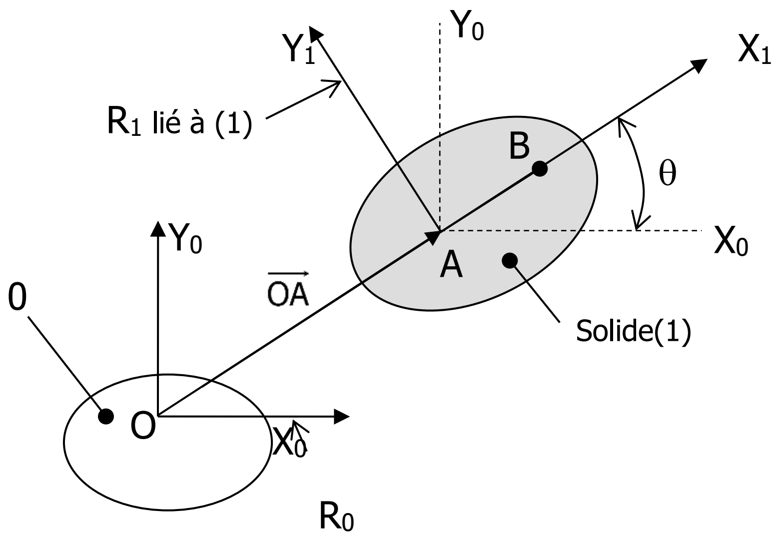
$$\vec{a}_M = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

$\vec{a}_t$: accélération tangentielle portée par la tangente en M.

$\vec{a}_n$: accélération normale perpendiculaire à $\vec{a}_t$ et toujours orientée vers la partie concave de la trajectoire.

I.7- Repérage des mouvements de solides

Le repérage d'un solide nécessite:



- Des coordonnées pour définir la position d'un point appartenant au solide ($\overrightarrow{OA}$ par exemple)
- Des paramètres permettant de définir la position angulaire du solide par rapport au repère de référence (θ par exemple).

La description du mouvement du solide impose de définir à la fois les caractéristiques cinématiques d'un point ($T_{A1/0}$, $\vec{V}_{A1/0}$ et $\vec{a}_{A1/0}$) et les grandeurs angulaires (θ, ω et α).
Plusieurs types de coordonnées (cartésiennes, polaires, etc.) sont utilisables pour repérer la position du point A.

II- MOUVEMENT DE TRANSLATION

II.1- Translation des solides

Lorsqu'un solide est en translation, chaque ligne de celui-ci se délace parallèlement à sa position initiale au cours du temps.

Propriétés

- Tous les points du solide en translation ont des trajectoires identiques.
- Tous les points du solide ont même vitesse.
- Tous les points du solide ont même accélération.
- Le mouvement de translation d'un solide est complètement défini par le mouvement de l'un quelconque de ses points.

Différents cas

On distingue deux grandes familles de translations:

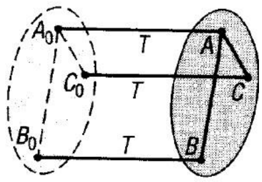
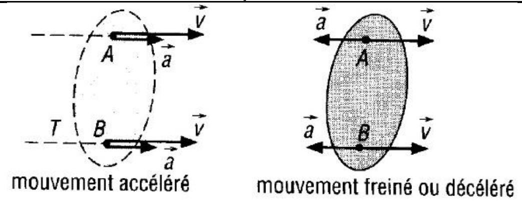
Translations rectilignes

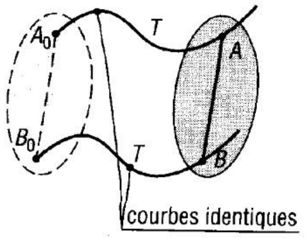
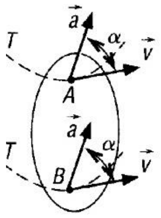
Les trajectoires (T) des points sont des droites ou des segments parallèles.

Translations curvilignes

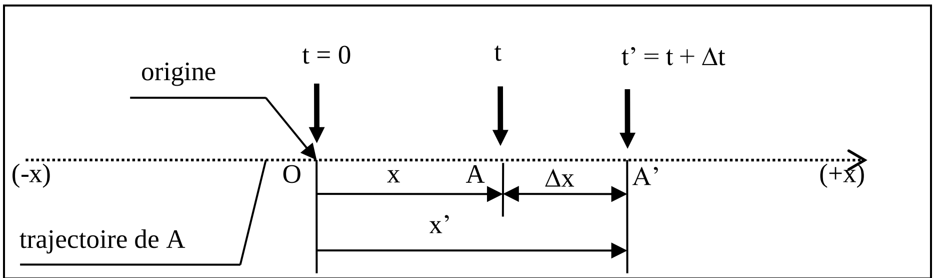
Les trajectoires des points sont des courbes géométriques quelconques identiques du plan de l'espace.

Cas	Trajectoires	Propriétés

Translation rectiligne	$A_0C_0 \mathbin{//} AC$
	$A_0B_0 \mathbin{//} AB$
	$A_0A = B_0B = C_0C = T$ 
		

Translation curviligne	$AB \mathbin{//} A_0B_0$ 	

II.2- Cas des translations rectilignes



La position du solide ou du point matériel (A), à l'instant t, est définie par la distance x, mesurée à partir du point O pris comme référence.
A l'instant suivant t' (t' = t + Δt), A s'est déplacé et occupe la position A' à x' de O.
Le déplacement de A à A' est Δx (Δx = x' - x) et a été effectué pendant la durée Δt = t' - t.

Vitesse en A

Vitesse moyenne (v_{moy})

La vitesse moyenne de A entre les instants t et t' est égale à la distance parcourue divisée par le temps mis pour parcourir cette distance.

$$v_{moy} = \frac{x'-x}{t'-t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad \text{unités: m.s}^{-1} \text{ ou m/s}$$

Vitesse instantanée v

Dans la formule précédente, plus Δt est petit, plus la vitesse moyenne se rapproche de la vitesse instantanée. Celle-ci s'obtient par passage à la limite (Δt tendant vers 0) et v est égale à la dérivée de x par rapport au temps t.

$$v = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right) \text{ donne: } v = \frac{dx}{dt} = \dot{x} \qquad \text{unités: m.s}^{-1} \text{ ou m/s}$$

Accélération de A

Les accélérations traduisent les variations de vitesse.
L'accélération moyenne a_{moy} entre les instants t et t' est égale à la variation de la vitesse (Δv=v'- v) divisé par Δt. Si on fait tendre Δt vers 0, l'accélération moyenne tend vers l'accélération instantanée a (dérivée de v par rapport au temps t).

$$a_{moy} = \frac{v'-v}{t'-t} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

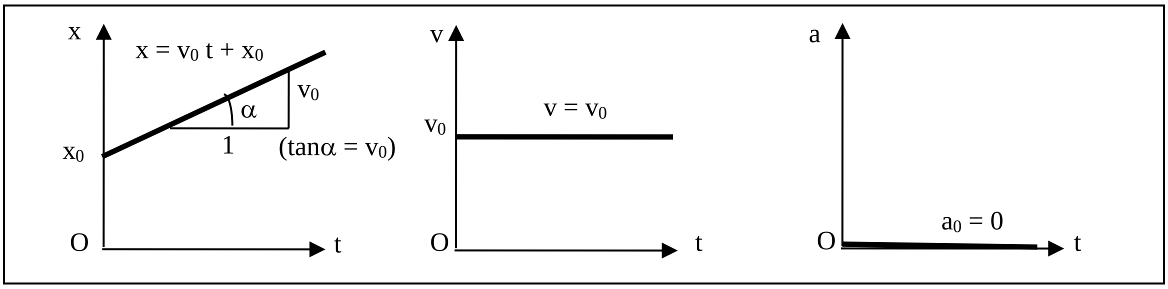
$$a = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right) = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$$

unités: $m.s^{-2}$ ou m/s^2

Mouvements rectilignes particuliers

Mouvement rectiligne uniforme
C'est le mouvement le plus simple, sans accélération (a = 0) et avec une vitesse constante au cours du temps.
Équations de mouvement

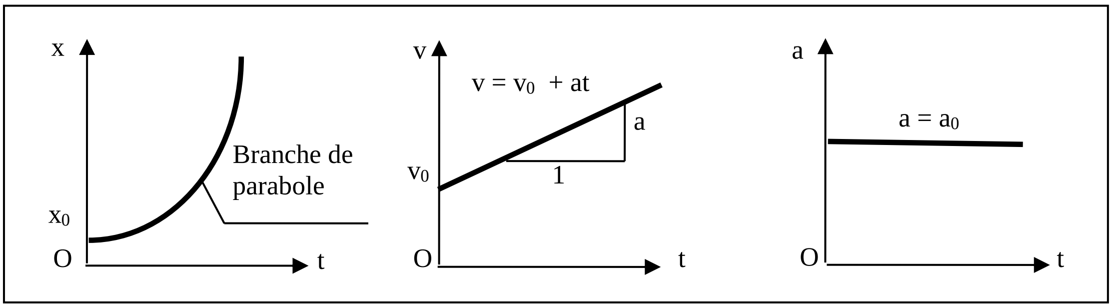
$$\left| \begin{array}{l} a = 0 \\ v = v_0 = constante \\ x = v_0 t + x_0 \end{array} \right. \qquad \begin{cases} x_0 : déplacement\ initial\ à\ t = 0 \\ v_0 : vitesse\ initiale\ et\ vitesse\ du\ mouvement \\ x : déplacement\ à\ l'instant\ t \end{cases}$$



Mouvement rectiligne uniformément varié
Il sert de modèle à de nombreuses études simplifiées. Pour ces mouvements, accélérés ($a > 0$) ou décélérés ($a < 0$), l'accélération a reste constante au cours du temps.
Équations de mouvement

$$\left| \begin{array}{l} a = a_0 = cst \\ v = v_0 + at \\ x = x_0 + v_0 t + at^2/2 \end{array} \right. \qquad \text{conditions initiales du mouvement: } à\ t = 0 \quad \left| \begin{array}{l} x = x_0 \\ v = v_0 \\ a = a_0 \end{array} \right.$$

<u>Formule utile:</u> **<u>$v^2 = v_0^2 + 2\,a\,(x - x_0)$</u>**
La formule s'obtient en éliminant le temps t entre les relations donnant v et x.



III- MOUVEMENT DE ROTATION

III-1. Angle de rotation, vitesse et accélération angulaires

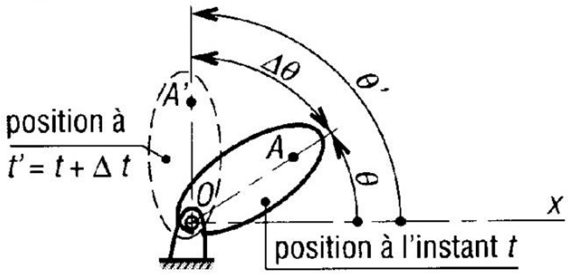
Angle de rotation θ
La rotation d'un solide est définie par son mouvement angulaire. Pour un solide en rotation plane, il suffit de mesurer l'angle de rotation θ d'une droite quelconque (OA) appartenant au solide pour repérer la rotation de celui-ci.
Il n'est pas nécessaire d'avoir un axe de rotation fixe pour avoir un mouvement de rotation.

Vitesse angulaire ou vitesse de rotation ω.
La démarche est la même que pour les translations rectilignes.
Vitesse angulaire moyenne

$$\omega_{moy} = \frac{\theta' - \theta}{t' - t} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

Vitesse angulaire instantanée

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\right) = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$$



unités: rad/s.
Remarque: Si N est la vitesse de rotation en tours par minute, alors $\omega = \pi$ N / 30.
1 tour = 2 π radian = 360°

Accélération angulaire α

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta\omega}{\Delta t}\right) = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} \qquad ou \qquad \alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta}$$ unités: rad/s².

Mouvement de rotation uniforme

α est nulle et les équations de mouvement sont: $\left|\begin{array}{l}\alpha = \ddot{\theta} = 0 \\ \omega = \omega_0 = cst \\ \theta = \theta_0 + \omega.t\end{array}\right.$

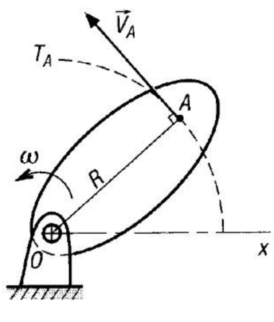
Mouvement de rotation uniformément accéléré

α est constante et les équations de mouvement sont: $\left|\begin{array}{l}\alpha = cst \\ \omega = \alpha \cdot t + \omega_0 \\ \theta = \theta_0 + \omega_0 \cdot t + \alpha t^2 / 2\end{array}\right.$

Formule utile: $\omega^2 = \omega_0{}^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$

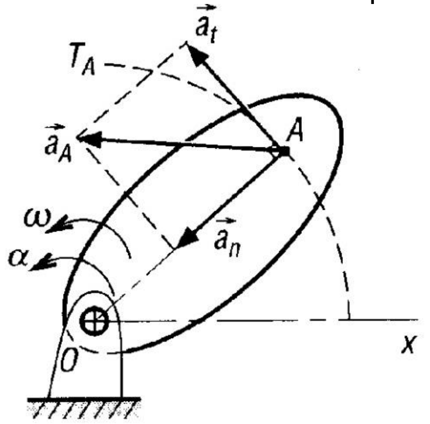
III-2. Vitesse et accélération d'un point

Vitesse
La trajectoire de A, T_A, est le cercle de centre O et de rayon OA = R.
$\vec{V}_A$ est la tangente en A au cercle (T_A); elle est également perpendiculaire en A à OA.
L'intensité de $\vec{V}_A$ est égale au produit de OA par la vitesse angulaire ω du solide:
$\vec{V}_A = \omega.OA = \omega R$



Accélération

L'accélération $\vec{a}_A$ du point A possède une composante normale $\vec{a}_n$ (dirigée de A vers O) et une composante tangentielle $\vec{a}_t$ (tangente à T_A ou perpendiculaire à OA).



$$\vec{a}_A = \vec{a}_t + \vec{a}_n \qquad a_t = \alpha R = \alpha .OA$$

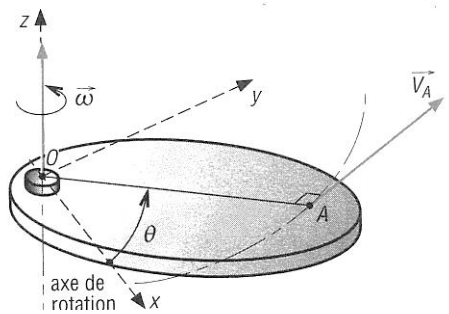
$$a_n = \omega^2 R = \frac{V_A{}^2}{R} = \omega .V_A$$

III-3. Vecteur-rotation $\vec{\omega}$

La représentation vectorielle de la vitesse de rotation ω est nécessaire aux études cinématiques dans l'espace. La démarche est la même que pour le vecteur-moment.

Vecteur-rotation $\vec{\omega}$

L'axe de rotation (O,z) est perpendiculaire au plan du mouvement de rotation (O,x,y). La vitesse angulaire ω est définie par le vecteur-rotation porté par l'axe de rotation et tel que:



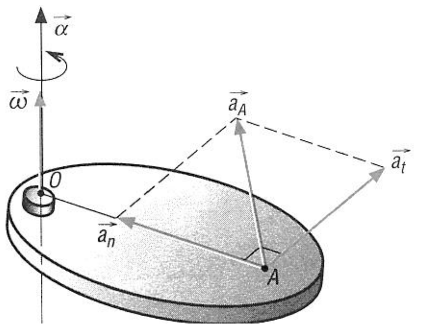
Vecteur accélération α

Comme pour $\vec{\omega}$, le vecteur accélération $\vec{\alpha}$ est porté par l'axe de rotation (O,z).
L'accélération du point A devient:

$$\vec{a}_A = \vec{\alpha} \wedge \vec{OA} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \vec{OA}\right)$$

$$\vec{a}_t = \vec{\alpha} \wedge \vec{OA}$$

$$\vec{a}_n = \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \vec{OA}\right)$$



IV- MOUVEMENT GÉNÉRAL PLAN.

Un mouvement plan général est considéré comme l'association d'une translation et d'une rotation. Les propriétés d'équiprojectivité et du C.I.R. (centre instantané de rotation) permettent de définir les vitesses de différents points du solide.

Torseur cinématique.

a. Relation du champ des vecteurs vitesse et définition

Soient A et B deux points du solide S : repère associé $\left(O_S, base\, B\right)$.V

On définit $\vec{\Omega}(S/0)$: vecteur vitesse de rotation du mouvement de S par rapport à 0 : repère associé $\left(O, base\, B_0\right)$.

D'après la formule de BOOR :

$$\left.\frac{d\,\overrightarrow{AB}}{dt}\right|_0 = \left.\frac{d\,\overrightarrow{AB}}{dt}\right|_B + \vec{\Omega}(S/0) \wedge \overrightarrow{AB}$$

Comme A et B sont sur S : $\left.\frac{d\,\overrightarrow{AB}}{dt}\right|_B = \vec{0}$.

D'où $\left.\frac{d\,\overrightarrow{AB}}{dt}\right|_0 = \vec{\Omega}(S/0) \wedge \overrightarrow{AB} = -\left.\frac{d\,\overrightarrow{OA}}{dt}\right|_0 + \left.\frac{d\,\overrightarrow{OB}}{dt}\right|_0 = -\vec{V}(A \in S/0) + \vec{V}(B \in S/0)$.

$\vec{V}(B \in S/0) = \vec{V}(A \in S/0) + \vec{\Omega}(S/0) \wedge \overrightarrow{AB}$

Finalement, nous obtenons **la relation définissant le champ des vecteurs vitesse d'un solide** :

$$\forall\ (A,B) \in S^2 \quad ; \quad \overrightarrow{V_{B\in S/0}} = \overrightarrow{V_{A\in S/0}} + \overrightarrow{\Omega_{S/0}} \wedge \overrightarrow{AB}$$

L'ensemble des vecteurs vitesse d'un solide est donc définit par :
- le vecteur rotation de S par rapport à 0 ;
- la vitesse d'UN point du solide.

Ces deux éléments sont des champs de vecteurs :
- un champ **uniforme** $\vec{\Omega}(S/0)$;

  ne dépendant pas des points de S.

- un champ **de moment** : le champ des vecteurs vitesses $\vec{V}(A \in S/0)$ défini par la relation ci-dessus;

  dépendant des points de S : $\forall\ (A,B) \in S^2$
  $\overrightarrow{V_{B\in S/0}} = \overrightarrow{V_{A\in S/0}} + \overrightarrow{\Omega_{S/0}} \wedge \overrightarrow{AB}$.

Cet ensemble de deux champs de vecteurs est appelé **torseur cinématique du solide S dans son mouvement par rapport à 0** et s'écrit au point A:

$$\boxed{\{V(S/0)\} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S/0) \\ \vec{V}(A \in S/0) \end{Bmatrix}_A}$$

<u>Eléments de réduction en A :</u>

$\vec{\Omega}(S/0)$ est appelé **résultante cinématique** et est un invariant du torseur cinématique.

$\vec{V}(A \in S/0)$ est appelée **moment cinématique** et dépend du point de réduction du torseur.

Le mouvement de S par rapport à 0 est totalement défini par l'expression du torseur cinématique $\boxed{\{V(S/0)\}}$.

En pratique, nous garderons le vocabulaire vecteur rotation et vecteur vitesse.

b. <u>Invariants du torseur cinématique</u>

Les invariants du torseur cinématique sont les éléments **ne variant pas selon le point de réduction du torseur**.

<u>Premier invariant :</u>

La résultante cinématique $\vec{\Omega}(S/0)$ est le premier invariant du torseur cinématique.

<u>Deuxième invariant :</u>

Le produit scalaire $\vec{\Omega}(S/0).\vec{V}(A \in S/0)$ est le deuxième invariant du torseur cinématique.

Démonstration :

Le champ des vecteurs vitesse est défini pour deux points de S par la relation :

$$\overrightarrow{V_{B\in S/0}} = \overrightarrow{V_{A\in S/0}} + \overrightarrow{\Omega_{S/0}} \wedge \overrightarrow{AB}$$

D'où :

$$\overrightarrow{\Omega_{S/0}}.\overrightarrow{V_{B\in S/0}} = \overrightarrow{\Omega_{S/0}}.\overrightarrow{V_{A\in S/0}} + \overrightarrow{\Omega_{S/0}}.(\overrightarrow{\Omega_{S/0}} \wedge \overrightarrow{AB})$$

Or $\overrightarrow{\Omega_{S/0}}.(\overrightarrow{\Omega_{S/0}} \wedge \overrightarrow{AB})$ est nul donc :

$$\overrightarrow{\Omega_{S/0}}.\overrightarrow{V_{B\in S/0}} = \overrightarrow{\Omega_{S/0}}.\overrightarrow{V_{A\in S/0}}$$

c. <u>Axe central du torseur cinématique</u>

L'axe central Δ du torseur cinématique définit l'ensemble des points C du solide S tels que :

$\forall C \in \Delta$: $\boxed{\vec{V}(C \in S/0) = \lambda.\vec{\Omega}(S/0)}$ avec $\lambda = cste$ appelé le pas du torseur

<u>Première conséquence :</u>

Tous les points de l'axe central Δ ont la même vitesse.

<u>Deuxième conséquence :</u>

Soient C_1 et C_2 deux points de l'axe central Δ.

Nous avons $\vec{V}(C_1 \in S/0) = \vec{V}(C_2 \in S/0) + \overrightarrow{C_1C_2} \wedge \vec{\Omega}(S/0)$. A l'aide de la première conséquence, on obtient :

$\overrightarrow{C_1C_2} \wedge \vec{\Omega}(S/0) = \vec{0}$ donc **la direction de l'axe central Δ est parallèle à $\vec{\Omega}(S/0)$.**

Il suffit donc de trouver un point de l'axe central Δ pour le définir totalement.

Soit A un point quelconque de S et C_0 le projeté orthogonal de A sur l'axe central Δ. Cherchons la position de C_0.

Nous pouvons écrire : $\begin{cases} \vec{V}(A \in S/0) = \vec{V}(C_0 \in S/0) + \overrightarrow{AC_0} \wedge \vec{\Omega}(S/0) \\ \vec{V}(C_0 \in S/0) = \lambda.\vec{\Omega}(S/0) \end{cases}$

$$\begin{cases} \vec{V}(A \in S/0) = \vec{V}(C_0 \in S/0) + \overrightarrow{AC_0} \wedge \vec{\Omega}(S/0) \\ \vec{V}(C_0 \in S/0) \wedge \vec{\Omega}(S/0) = \vec{0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{V}(A \in S/0) \wedge \vec{\Omega}(S/0) = \vec{V}(C_0 \in S/0) \wedge \vec{\Omega}(S/0) + (\overrightarrow{AC_0} \wedge \vec{\Omega}(S/0)) \wedge \vec{\Omega}(S/0) \\ \vec{V}(C_0 \in S/0) \wedge \vec{\Omega}(S/0) = \vec{0} \end{cases}$$

D'où $(\overrightarrow{AC_0} \wedge \vec{\Omega}(S/0)) \wedge \vec{\Omega}(S/0) = \vec{V}(A \in S/0) \wedge \vec{\Omega}(S/0)$

En utilisant le double vectoriel : $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u}.\vec{w})\vec{v} - (\vec{w}.\vec{v})\vec{u}$

D'où : $(\overrightarrow{AC_0} \wedge \vec{\Omega}(S/0)) \wedge \vec{\Omega}(S/0) = \left(\overrightarrow{AC_0}.\vec{\Omega}(S/0)\right)\vec{\Omega}(S/0) - \left(\vec{\Omega}^2(S/0)\right)\overrightarrow{AC_0}$

Il faut trouver le vecteur $\overrightarrow{AC_0}$ tel que :

$\vec{V}(A \in S/0) \wedge \vec{\Omega}(S/0) = \left(\overrightarrow{AC_0}.\vec{\Omega}(S/0)\right)\vec{\Omega}(S/0) - \left(\vec{\Omega}^2(S/0)\right)\overrightarrow{AC_0}$

Comme C_0 est le projeté orthogonal de A sur l'axe central Δ et que la direction de Δ est parallèle à $\vec{\Omega}(S/0)$ alors $\overrightarrow{AC_0}.\vec{\Omega}(S/0) = 0$.

$$-\vec{V}(A \in S/0) \wedge \vec{\Omega}(S/0) = \left(\vec{\Omega}^2(S/0)\right)\overrightarrow{AC_0}$$

Finalement le projeté C_0 est défini par l'expression : $\boxed{\overrightarrow{AC_0} = \dfrac{\vec{\Omega}(S/0) \wedge \vec{V}(A \in S/0)}{\vec{\Omega}^2(S/0)}}$.

L'axe central Δ du torseur cinématique du mouvement de S par rapport à 0 est :

l'axe $\left(C_0, \vec{\Omega}(S/0)\right)$ avec : $\boxed{\overrightarrow{AC_0} = \dfrac{\vec{\Omega}(S/0) \wedge \vec{V}(A \in S/0)}{\vec{\Omega}^2(S/0)}}$ avec $A \in S$

IV.1- Equiprojectivité.

Par définition du solide indéformable, pour deux points A et B de S : $\overrightarrow{AB}^2 = cste$.

Dérivons temporellement cette expression :

$$2.\left.\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right|_0 .\overrightarrow{AB} = 0 \qquad 2.\left(\left.\frac{d\overrightarrow{AO}}{dt}\right|_0 + \left.\frac{d\overrightarrow{OB}}{dt}\right|_0\right).\overrightarrow{AB} = 0$$

$$-\left.\frac{d\overrightarrow{AO}}{dt}\right|_0 .\overrightarrow{AB} = \left.\frac{d\overrightarrow{OB}}{dt}\right|_0 .\overrightarrow{AB} \qquad \left.\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right|_0 .\overrightarrow{AB} = \left.\frac{d\overrightarrow{OB}}{dt}\right|_0 .\overrightarrow{AB}$$

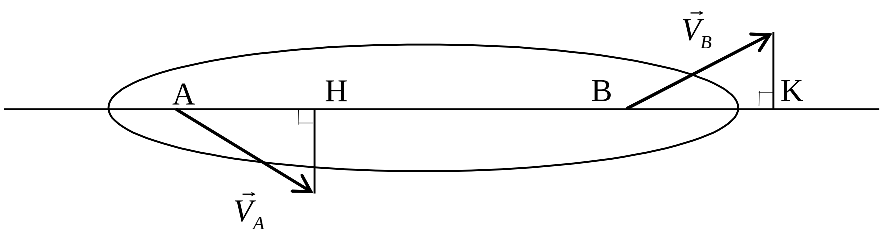
$$\boxed{\vec{V}(A \in S/0).\overrightarrow{AB} = \vec{V}(B \in S/0).\overrightarrow{AB} \qquad (A,B) \in S^2}$$

Le vecteur vitesse de A $\vec{V}(A \in S/0)$ admet sur $\overrightarrow{AB}$ la même projection que le vecteur vitesse de B $\vec{V}(B \in S/0)$.

On dit que le champ de vecteurs vitesses d'un solide est **équiprojectif.**

La relation ci-dessus est appelée **relation d'équiprojectivité** des vecteurs vitesse du solide S.

<u>Interprétation graphique de l'équiprojectivité.</u>



Le champ des vitesses est équiprojectif si pour A et B, deux points appartenant à un même solide et $\vec{V}_A$ et $\vec{V}_B$ leurs vitesses respectives, les projections orthogonales des deux vecteurs vitesses sur la droite (AB) sont égales : $\vec{V}_A \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{V}_B \cdot \overrightarrow{AB}$.

Ordre de construction :

Nous connaissons la vitesse au point A et la direction de la vitesse au point B.
Tracer la figure à une échelle donnée.
Choisir une échelle pour les vitesses.
Projeter orthogonalement la vitesse $\vec{V}_A$ au point A sur la direction (AB). On obtient un segment AH.
Reporter la longueur de AH à partir du point B (du même coté). On obtient un segment BK.
Tracer la perpendiculaire à (AB) passant par K.
L'intersection de cette perpendiculaire avec la direction de la vitesse au point B donne l'extrémité du vecteur vitesse en B. Pour connaître sa norme, il faut mesurer cette longueur en tenant compte de l'échelle.

Remarque : La détermination d'une vitesse $\vec{V}_C$ de direction et d'intensité inconnues est possible par double équiprojectivité à partir de deux vitesses $\vec{V}_A$ et $\vec{V}_B$ connues.

Exemple : Le système bielle manivelle.

IV.2- Centre instantané de rotation : C.I.R.

Considérons le mouvement plan sur plan d'une bielle 2 par rapport à son pilier 0 et défini par le torseur cinématique suivant :

$$\{V_{20}\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{\Omega}(2/0) = \dot{\theta}_4.\overrightarrow{z_0} \\ \vec{V}(P,2/0) = u.\overrightarrow{x_0} + v.\overrightarrow{y_0} \end{matrix} \right\}_P$$ P point quelconque de 2.

On se propose de déterminer s'il existe, le point I du plan de glissement $\left(O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}\right)$ lié à la bielle 2 tel que I soit le centre de rotation de la bielle 2 par rapport à 0. La vitesse de I est donc nulle : $\boxed{\vec{V}(I,2/0) = \vec{0}}$.

Le torseur cinématique de 2/0 en I est : $\{V_{20}\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{\Omega}(2/0) = \dot{\theta}_4.\overrightarrow{z_0} \\ \vec{V}(I,2/0) = \vec{V}(P,2/0) + \overrightarrow{IP} \wedge \vec{\Omega}(2/0) \end{matrix} \right\}_I$ d'où :

$$\vec{V}(P,2/0) = \overrightarrow{PI} \wedge \vec{\Omega}(2/0) = \overrightarrow{PI} \wedge \dot{\theta}_4.\overrightarrow{z_0}$$

Pour isoler PI, utilisons les propriétés du double produit vectoriel : $\vec{u} \wedge \vec{v} \wedge \vec{u} = \vec{u}^2.\vec{v}$

$$\vec{\Omega}(2/0) \wedge \vec{V}(P,2/0) = \vec{\Omega}(2/0) \wedge \overrightarrow{PI} \wedge \vec{\Omega}(2/0) = \vec{\Omega}(2/0)^2.\overrightarrow{PI}$$ et donc finalement :

$$\overrightarrow{PI} = \frac{\vec{\Omega}(2/0) \wedge \vec{V}(P,2/0)}{\vec{\Omega}(2/0)^2} = \frac{\dot{\theta}_4.z_0 \wedge \vec{V}(P,2/0)}{\dot{\theta}_4^{\,2}}$$

La position de I est donnée par la relation suivante : $\boxed{\overrightarrow{PI} = \dfrac{\dot{\theta}_4.\overrightarrow{z_0} \wedge \vec{V}(P,2/0)}{\dot{\theta}_4^{\,2}}}$.

Le point I est appelé le **centre instantané de rotation CIR de 2 dans son mouvement plan sur plan par rapport à 0**.

Il sera dorénavant noté $\boxed{I_{20}}$.

1. Propriétés.

En analysant la relation ci-dessus, nous pouvons déduire des propriétés importantes sur la position du CIR et sur le mouvement plan sur plan.

Position du CIR :

- le CIR I_{20} est **mobile**, la relation permet de connaître sa position à l'instant t ;
- $\overrightarrow{PI}$ est orthogonal à $\overrightarrow{z_0}$: le CIR I_{20} est dans le plan de glissement ;
- $\overrightarrow{PI}$ **est orthogonal à** $\vec{V}(P,2/0)$.

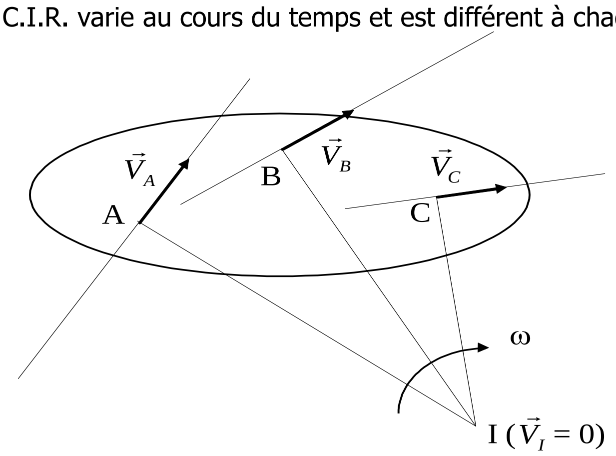
Mouvement plan sur plan de 2/0 :

- si $\dot{\theta} \neq 0$ alors le mouvement plan sur plan de 2/0 est, à l'instant t, **une rotation d'axe** $\left(I_{20}, \overrightarrow{z_0}\right)$;
- si $\dot{\theta} = 0$ alors le mouvement plan sur plan de 2/0 est, à l'instant t, une translation. I_{20} est rejeté à l'infini dans la direction perpendiculaire à la vitesse de translation.

Le CIR va nous permettre la résolution graphique de problème de cinématique des solides.

2. Exploitations graphiques du CIR 1.

Pour tout solide en mouvement plan général, il existe à un instant donné un point I et un seul ayant une vitesse nulle ; ce point est appelé centre instantané de rotation : C.I.R. A l'instant étudié, tout se passe comme si le mouvement était une rotation autour de I. La vitesse d'un point A du solide a donc une direction perpendiculaire à (IA).
La position du C.I.R. varie au cours du temps et est différent à chaque instant.



$$\frac{V_A}{IA} = \frac{V_B}{IB} = \frac{V_C}{IC} = \omega$$

Exemple : Échelle.

Conclusion : Il suffit donc de connaître une vitesse en un point du solide et la direction en un autre point pour déterminer la vitesse en n'importe quel point du solide.

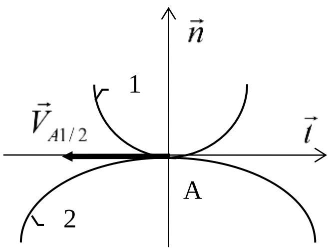
V- COMPOSITION DE MOUVEMENTS.

Nous avons vu dans le premier chapitre la notion de mouvement relatif. Lorsqu'un solide (1) est en mouvement par rapport à un solide (2) qui est lui-même en mouvement par rapport à un solide (0), le mouvement de (1) par rapport à (0) est la somme des deux mouvements précédents. On dit qu'il y a composition de mouvement : $M^{vt}_{1/0} = M^{vt}_{1/2} + M^{vt}_{2/0}$.

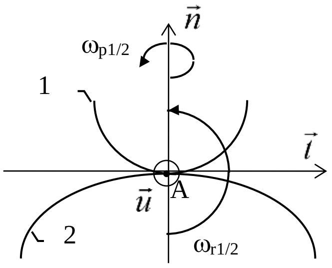
V.1- Composition des vitesses

Pour un point A appartenant à un solide en mouvement plan général, la relation de composition des vitesses s'écrit : $\vec{V}_{A1/0} = \vec{V}_{A1/2} + \vec{V}_{A2/0}$. La relation entre les vitesses angulaires est identique.

V.2- Glissement, roulement et pivotement.



A est le point de contact entre les solides (1) et (2) en glissement relatif.
$\vec{V}_{A1/2}$ est la vitesse de glissement du solide (1) par rapport au solide (2).
$\vec{V}_{A1/2}$ est toujours contenue dans le plan tangent au contact.



$\vec{u}$ est un vecteur unitaire perpendiculaire à $\vec{n}$ et $\vec{t}$.
La vitesse angulaire $\omega_{r1/2}$ portée par le vecteur $\vec{u}$ caractérise le roulement du solide (1) par rapport au solide (2) autour de l'axe $\vec{u}$.
$\omega_{p1/2}$ porté par le vecteur $\vec{n}$ est le pivotement de (1) par rapport à (2) autour de $\vec{n}$.

Combinaisons possibles				
	$\omega_{r1/2} = 0$ $\omega_{p1/2} = 0$	$\omega_{r1/2} = 0$ $\omega_{p1/2} \neq 0$	$\omega_{r1/2} \neq 0$ $\omega_{p1/2} = 0$	$\omega_{r1/2} \neq 0$ $\omega_{p1/2} \neq 0$
$\vec{V}_{A1/2} = \vec{0}$	Adhérence	pivotement	roulement	roulement avec pivotement
$\vec{V}_{A1/2} \neq \vec{0}$	Glissement	glissement avec pivotement	glissement avec roulement	glissement avec pivotement et roulement