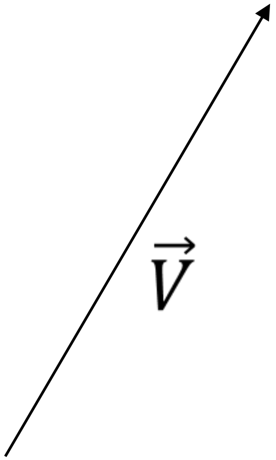
S7 - Construction Mécanique – calcul vectoriel

Scalaire :

Scalaire : grandeur **numérique** : norme, intensité

Vecteur :

Vecteur: grandeur **géométrique** : 3 composantes



Direction : droite support

Sens : orientation origine vers extrémité, flèche

Intensité : norme, module noté $\|\vec{V}\|$ ou V

Paramétrage :

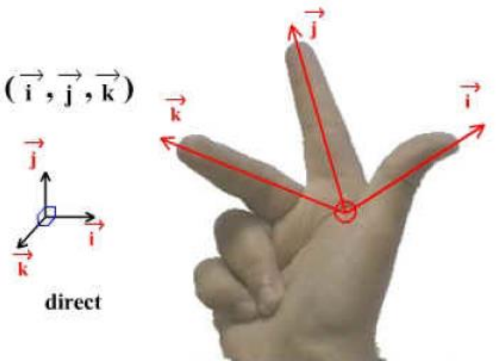
Base orthonormée : 3 directions => 3 vecteurs

Orthonormé : vecteurs unitaires orthogonaux

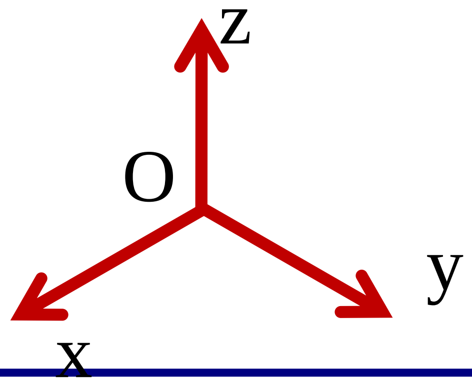
$$\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = \left\|\vec{k}\right\| = 1 \qquad \vec{\imath} \perp \vec{\jmath} \perp \vec{k}$$

Direct : orientation des vecteurs en sens positif

Règle main droite



Repère orthonormé : 1 base orthonormée + 1 point



Vecteur :

Composantes Dans l'espace vectoriel

$$\vec{V}\left|\begin{matrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{matrix}\right.$$ où $V_x, V_y\ et V_z$ sont les composantes de $\vec{V}\ suivant\ \vec{x}, \vec{y}\ et\ \vec{z}$:

$$\vec{V} = V_x.\vec{x} + V_y.\vec{y} + V_z.\vec{z}$$

Norme

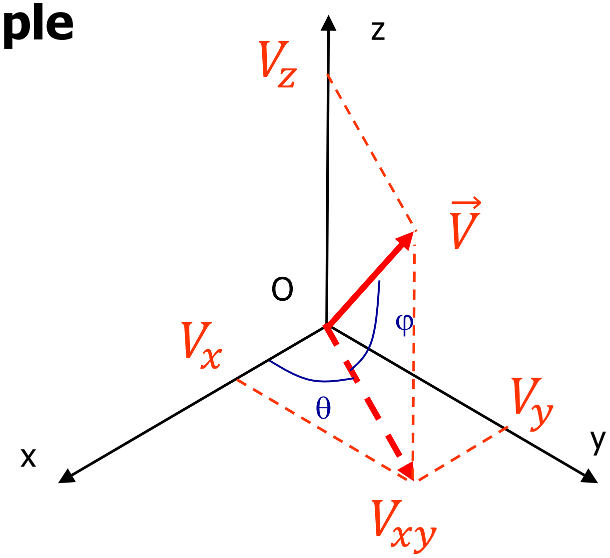
$$\|\vec{V}\| = \sqrt{{V_x}^2 + {V_y}^2 + {V_z}^2} = V$$

Projection d'un vecteur :

Méthode

- Garder le cas général
- Rester en valeur littérale
- Réaliser un schéma avec tous les paramètres

Exemple



$$V_z = V.\sin\varphi$$

$$V_{xy} = V.\cos\varphi$$

$$V_x = V.\cos\varphi.\cos\theta$$

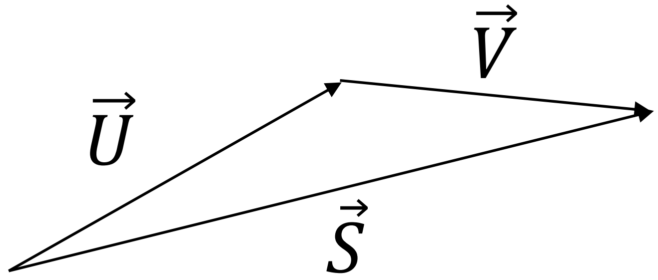
$$V_y = V.\cos\varphi.\sin\theta$$

Opérations sur les vecteurs :

$$\vec{U}\ \Bigg|_{\mathcal{R}}\begin{matrix}U_x\\U_y\\U_z\end{matrix} \quad \text{et} \quad \vec{V}\ \Bigg|_{\mathcal{R}}\begin{matrix}V_x\\V_y\\V_z\end{matrix}$$

Somme

$$\vec{S}=\vec{U}+\vec{V}=(U_x+V_x).\vec{x}+(U_y+V_y).\vec{y}+(U_z+V_z).\vec{z}$$



Opérations sur les vecteurs :

$$\vec{U}\ \Big|_{\mathcal{R}}\begin{matrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{matrix} \quad \text{et} \quad \vec{V}\ \Big|_{\mathcal{R}}\begin{matrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{matrix}$$

Produit scalaire

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = \|\vec{U}\| \cdot \|\vec{V}\| \cdot \cos(\vec{U}, \vec{V})$$

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = U_x \cdot V_x + U_y \cdot V_y + U_z \cdot V_z$$

$$\text{à } condition\ que\ \vec{U}\ et\ \vec{V} soient\ écrits\ dans\ la\ même\ base$$

Propriétés

Nullité : $\vec{U} \cdot \vec{V} = 0$ si $\left| \begin{array}{c} \vec{U} = \vec{0} \\ \vec{V} = \vec{0} \\ \left(\widehat{\vec{U};\vec{V}}\right) = \frac{\pi}{2} \text{ cas où } \cos\left(\widehat{\vec{U};\vec{V}}\right) = 0 \end{array} \right.$ soit $\vec{U} \perp \vec{V}$

Commutativité : $\vec{U} \cdot \vec{V} = \vec{V} \cdot \vec{U}$

Distributivité : $\vec{U} \cdot \left(\vec{V} + \vec{W}\right) = \vec{U} \cdot \vec{V} + \vec{U} \cdot \vec{W}$

Opérations sur les vecteurs :

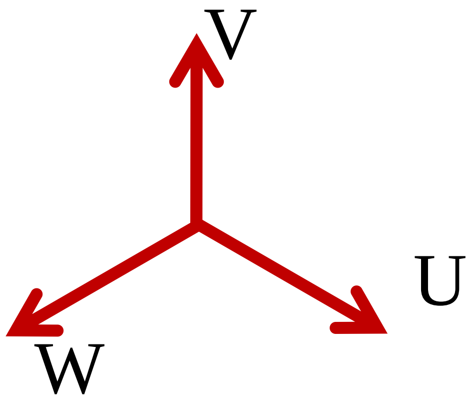
$$\vec{U}\begin{vmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{vmatrix}_{\mathcal{R}} \text{ et } \vec{V}\begin{vmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{vmatrix}_{\mathcal{R}}$$

Produit vectoriel

$$\vec{U} \wedge \vec{V} = \vec{W}$$

$$\|\vec{W}\| = \|\vec{U}\|.\|\vec{V}\|.sin(\vec{U},\vec{V})$$

Tel que $\vec{W} \perp (\vec{U},\vec{V})$ et $(\vec{U},\vec{V},\vec{W})$ $direct$



$$\vec{U}\begin{vmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{vmatrix} \wedge \vec{V}\begin{vmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} U_y \cdot V_z - U_z \cdot V_y \\ U_z \cdot V_x - U_x \cdot V_z \\ U_x \cdot V_y - U_y \cdot V_x \end{vmatrix}$$

Propriétés sur les opérations :

Produit vectoriel

Propriétés

Nullité : $\vec{U} \wedge \vec{V} = 0$ si $\left| \begin{array}{c} \vec{U} = \vec{0} \\ \vec{V} = \vec{0} \\ \left(\widehat{\vec{U};\vec{V}}\right) = 0 \text{ cas où } \sin\left(\widehat{\vec{U};\vec{V}}\right) = 0 \end{array} \right.$ soit $\vec{U} // \vec{V}$

Anticommutativité : $\vec{U} \wedge \vec{V} = -\vec{V} \wedge \vec{U}$

Distributivité : $\vec{U} \wedge \left(\vec{V} + \vec{W}\right) = \vec{U} \wedge \vec{V} + \vec{U} \wedge \vec{W}$

Opérations sur les vecteurs :

$\vec{U} \;\begin{vmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{vmatrix}_{\mathcal{R}}$, $\vec{V} \;\begin{vmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{vmatrix}_{\mathcal{R}}$ et $\vec{W} \;\begin{vmatrix} W_x \\ W_y \\ W_z \end{vmatrix}_{\mathcal{R}}$

Produit mixte

C'est un scalaire

Noté $(\vec{U}, \vec{V}, \overrightarrow{W})$

$$(\vec{U}, \vec{V}, \overrightarrow{W}) = \left(\vec{U} \wedge \vec{V}\right) \cdot \overrightarrow{W} = \vec{U} \cdot (\vec{V} \wedge \overrightarrow{W})$$

<u>Propriétés</u>

<u>Anticommutativité</u> : $(\vec{U}, \vec{V}, \overrightarrow{W}) = -(\vec{V}, \vec{U}, \overrightarrow{W})$

<u>Permutation circulaire</u> : $(\vec{U}, \vec{V}, \overrightarrow{W}) = (\vec{V}, \overrightarrow{W}, \vec{U})) = (\overrightarrow{W}, \vec{U}, \vec{V})$