Mécanique :

STATIQUE DU SOLIDE

BTS ATI : S721-S723

Sommaire

I - Introduction

II - les actions mécaniques

- Définition des actions mécaniques :
- Modélisation des actions mécaniques :
- Classification des actions mécaniques :

III - Isolement et équilibre d'un solide

- Isolement d'un solide
- Actions mutuelles
- Équilibre d'un solide

IV - Résolution des problèmes de statique

- Méthodes de résolution
- Statique analytique
  - Théorème des forces
  - Théorème des moments
  - Les torseurs
- Statique plane
- Statique graphique
  - Solide soumis à deux forces
  - Solide soumis à trois forces

Objet de la statique :

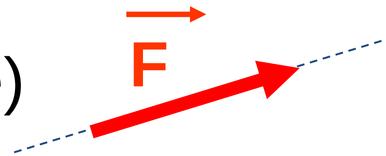
La statique étudie
les actions mécaniques
exercées sur des corps
indéformables et en équilibre.

D'une façon générale, on appelle **action mécanique** toute cause physique susceptible :

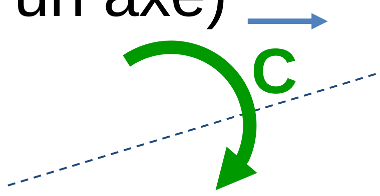
- de maintenir un corps au repos,
- de créer, de maintenir ou de modifier un mouvement,
- de déformer un corps.

Les actions mécaniques qui s’exercent sur les solides peuvent être réparties en 2 grandes familles. On définit ainsi :

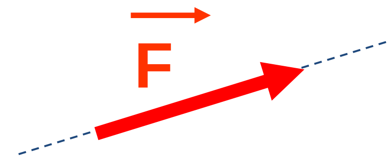
Les **FORCES** (pousser / tirer selon un axe)



Les **MOMENTS** (tourner / tordre autour d'un axe)

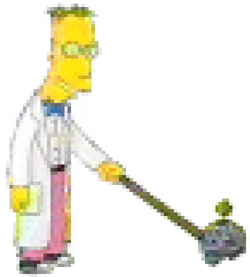


Quelques exemples intuitifs :

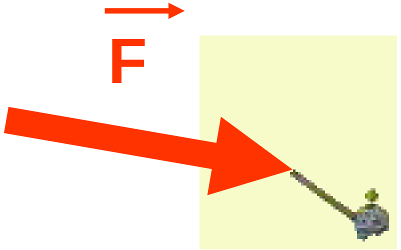


1°/ Les **FORCES** (pousser / tirer selon un axe)

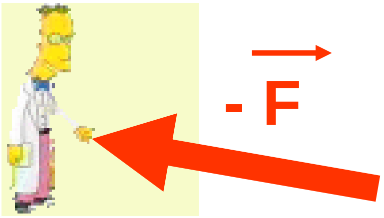
Exemple 1 : Pousser un aspirateur…



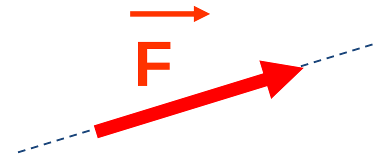
Que subit l'aspirateur ?



Que subissez-vous ?

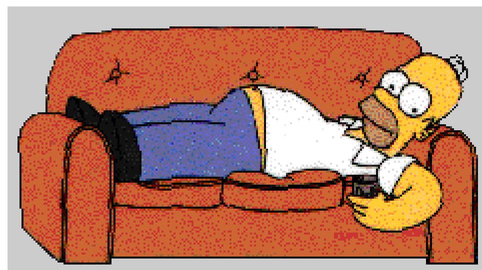


Quelques exemples intuitifs :

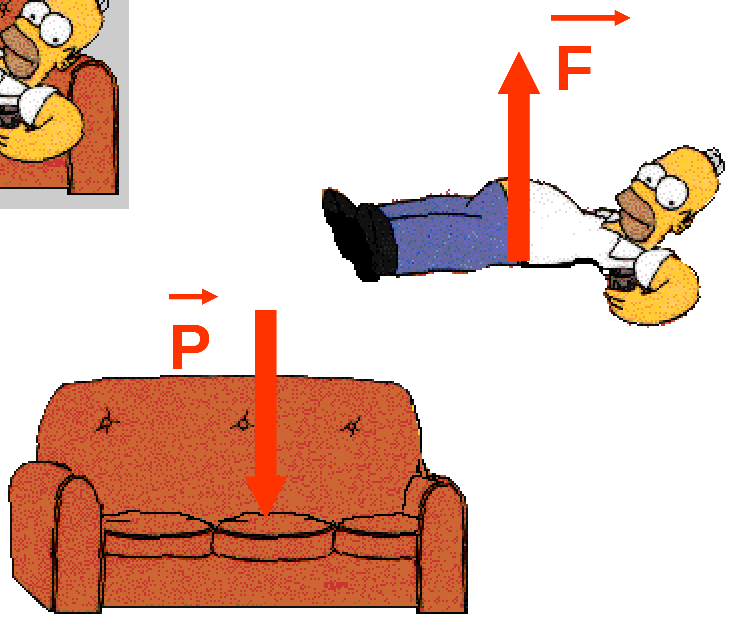


1°/ Les **FORCES** (pousser / tirer selon un axe)

Exemple 2 : Soutenir un objet

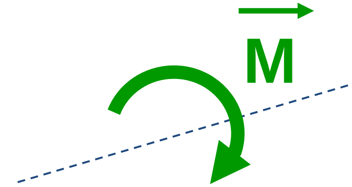


Que subit l'objet ?



Que subit la banquette ?

Quelques exemples intuitifs :

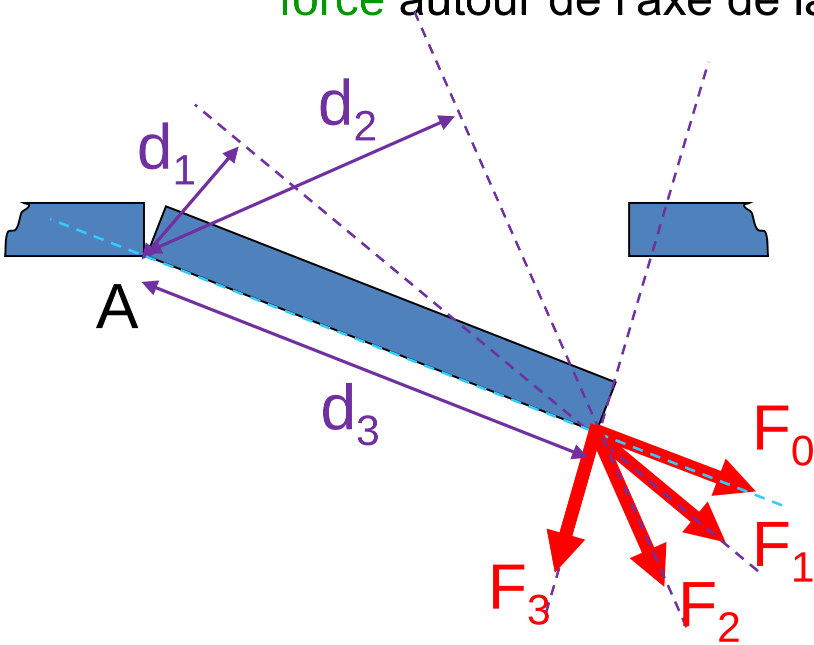


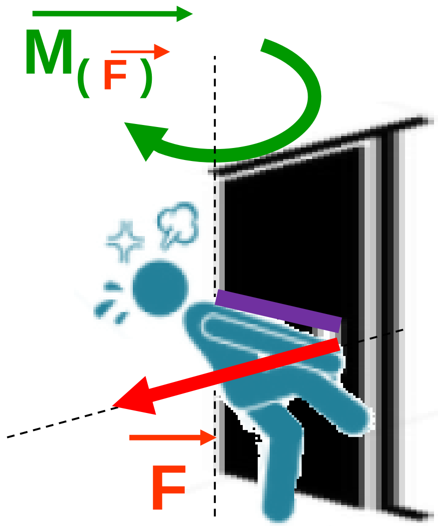
2°/ Les **MOMENTS** (tourner / tordre autour d'un axe)

Exemple 1 : faire tourner une porte autour de son axe

vous appliquez une **force** décalée de l'axe (non dirigée vers l'axe)…

…cela provoque un **MOMENT** de cette force autour de l'axe de la porte.

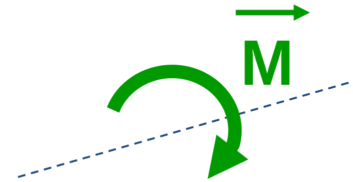




$$\boxed{M_{/A(F)} = F \times d}$$

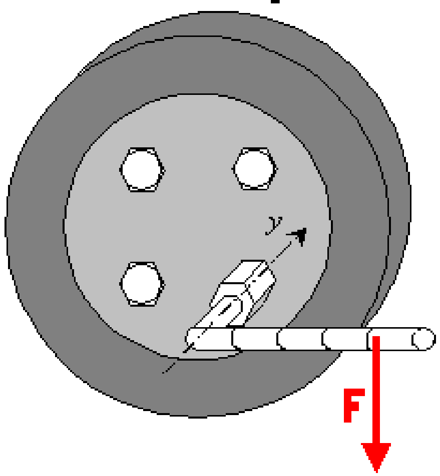
Nm N m

Quelques exemples intuitifs :



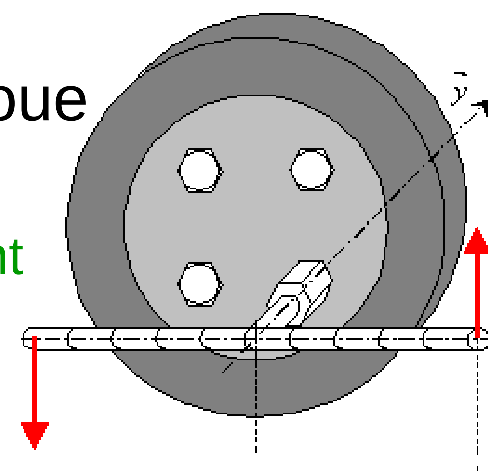
2°/ Les **MOMENTS** (tourner / tordre autour d'un axe)

Exemple 2 : faire tourner une clé de roue



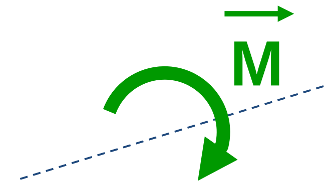
➔Dans ce cas, vous provoquez un **MOMENT de force** par rapport à l'axe de rotation

Exemple 3 : faire tourner une clé de roue



- La somme de ces deux forces est nulle.
- De plus, ces deux forces génèrent un moment

L'action mécanique exercée par la clé sur la roue est appelée un **Couple**.



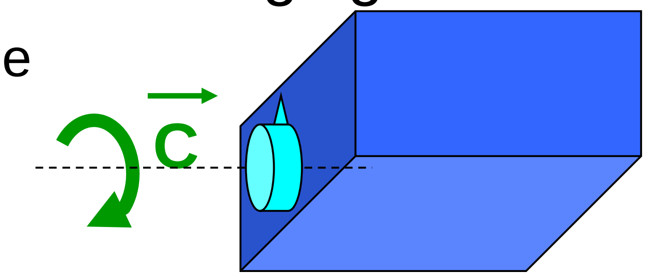
Quelques exemples intuitifs :

2°/ Les **MOMENTS** (tourner / tordre autour d'un axe)

Exemple 4 : faire tourner un bouton de réglage

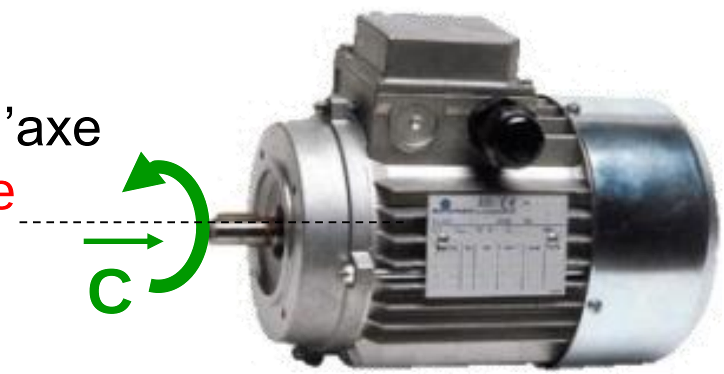
Vous exercez une action mécanique ne comportant aucune force mais uniquement de la torsion...

➔ Vous appliquez un **COUPLE**



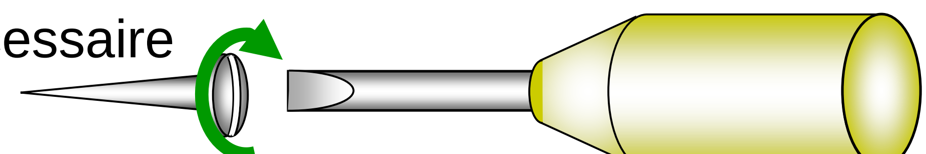
Exemple 5 : Le couple moteur

L'action mécanique engendrée par l'axe d'un moteur ne produit aucune force mais uniquement de la torsion...



Exemple 6 : Visser une vis

Pour faire tourner la vis, il est nécessaire d'appliquer un couple sur celle-ci.

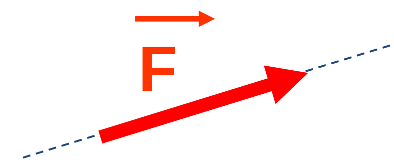


Les actions mécaniques sont modélisées par des **vecteurs** car elles en possèdent toutes les propriétés :

(point d'application, direction, sens, norme)

➔ Pour les **FORCES** (représentées par une simple flèche)

Elles s'expriment en **NEWTON** (N)

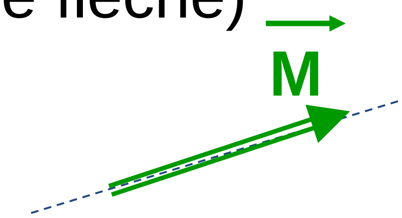


Elles sont notées $\overrightarrow{F_{A1\rightarrow 2}}$, ou bien $\overrightarrow{A_{1\rightarrow 2}}$, ce qui se lit :

« Force au point A exercée par le solide 1 sur le solide 2 »

➔ Les **MOMENTS** (représentés par une double flèche)

Ils s'expriment en **NEWTON mètre** (Nm)



Ils sont notés $\overrightarrow{M_{B(\overrightarrow{A1\rightarrow 2})}}$, ce qui se lit :

« Moment par rapport au point B de l'effort exercé en A par le solide 1 sur le solide 2 »

Les actions mécaniques sont classées en deux familles:

➔ Les **actions mécaniques à distance** (sans contact)

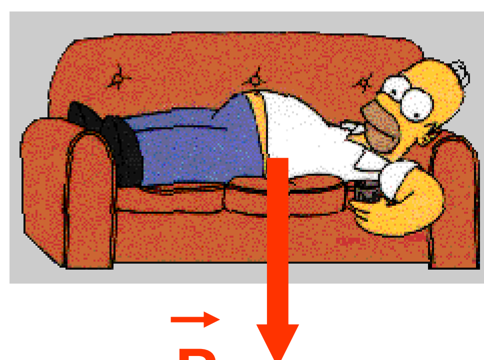
- Action de la pesanteur (poids)

  - Cette action est toujours appliquée au centre de gravité

  - Sa direction est toujours verticale, son sens vers le bas.

$$\boxed{P = m \cdot g}$$

(N) (kg) (9.81m/s²)

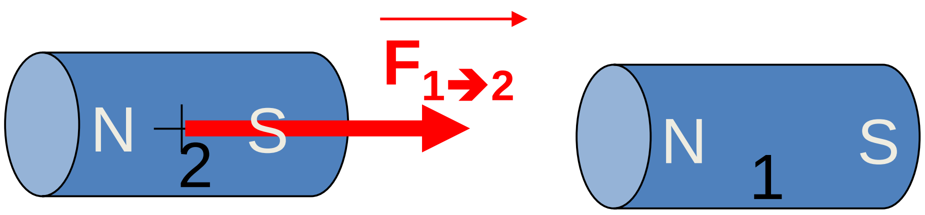


$\vec{P}$

Les actions mécaniques sont classées en deux familles:

➔ Les **actions mécaniques à distance** (sans contact)

- Action de la pesanteur (poids)
- Actions dues au Magnétisme

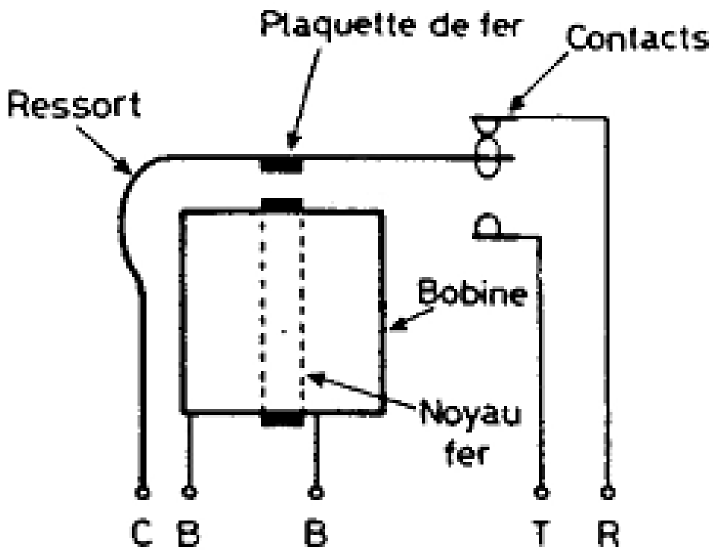


- Aimants permanents

Cette action dépend bien-sûr de l'orientation et de l'éloignement relatifs des deux aimants.
(voir le cours de physique)

- Moteur électrique

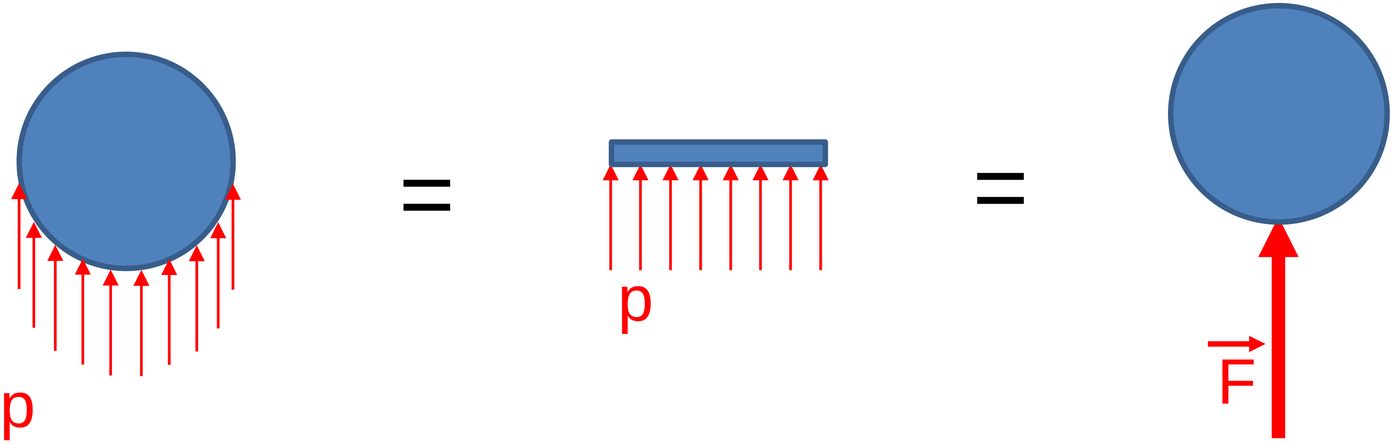
- bobine de relais



Les actions mécaniques sont classées en deux familles:

➔ Les **actions mécaniques à distance** (sans contact)

- Action de la pesanteur (poids)
- Actions dues au Magnétisme
- Actions dues à la pression

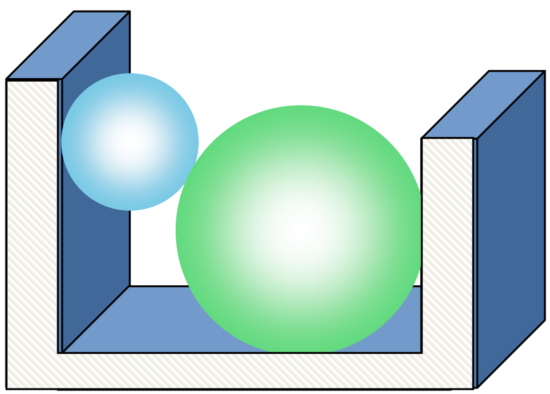


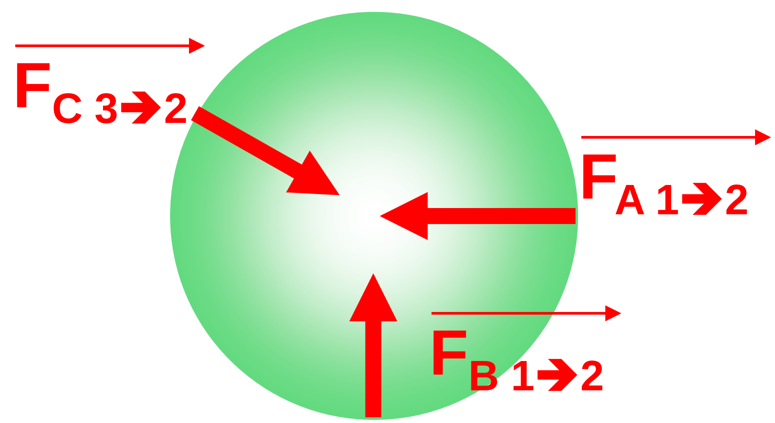
Les actions mécaniques sont classées en deux familles:

➔ Les **actions mécaniques à distance** (sans contact)

➔ Les **actions mécaniques de contact** (dans les liaisons mécaniques)

Tout contact, provoque une action mécanique





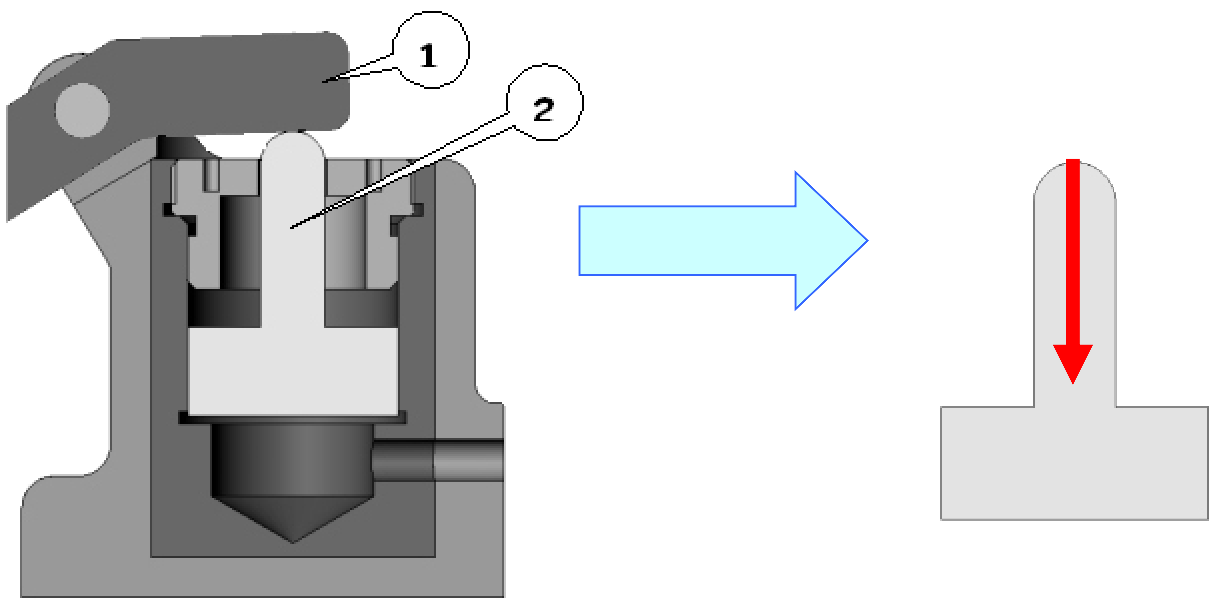
On les classe en 3 types suivant la forme du contact …

Les actions mécaniques sont classées en deux familles:

➔ Les **actions mécaniques a distance** (sans contact)

➔ Les **actions mécaniques de contact** (dans les liaisons mécaniques)

- ACTION PONCTUELLE   Exemple : contact ponctuel (sphère/plan) entre la tige de vérin (2) et le levier (1) de la bride hydraulique.



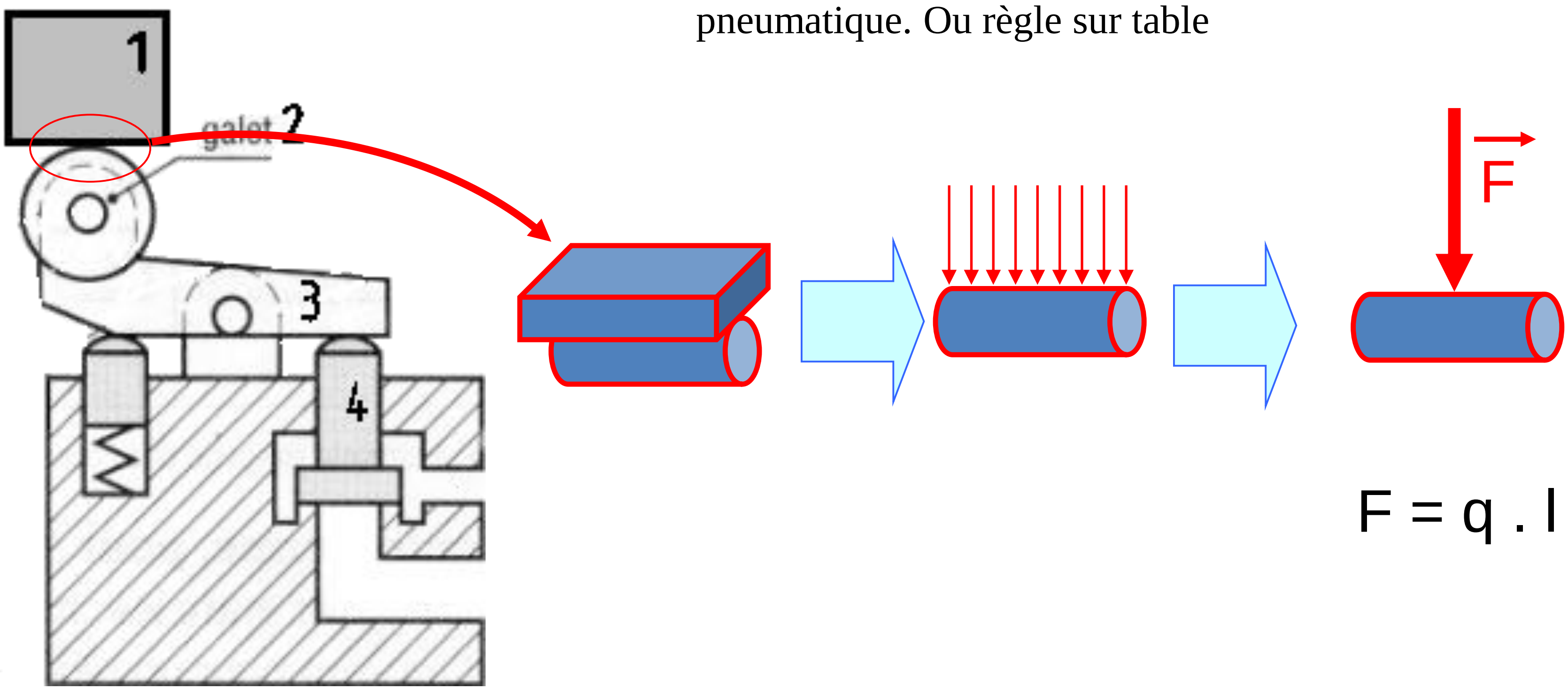
Les actions mécaniques sont classées en deux familles:

➔ Les **actions mécaniques a distance** (sans contact)

➔ Les **actions mécaniques de contact** (dans les liaisons mécaniques)

- ACTION PONCTUELLE
- ACTION répartie sur une ligne :

Exemple : contact linéique (plan/cylindre) entre la pièce (1) et le galet (2) du capteur pneumatique. Ou règle sur table



$$F = q \cdot l$$

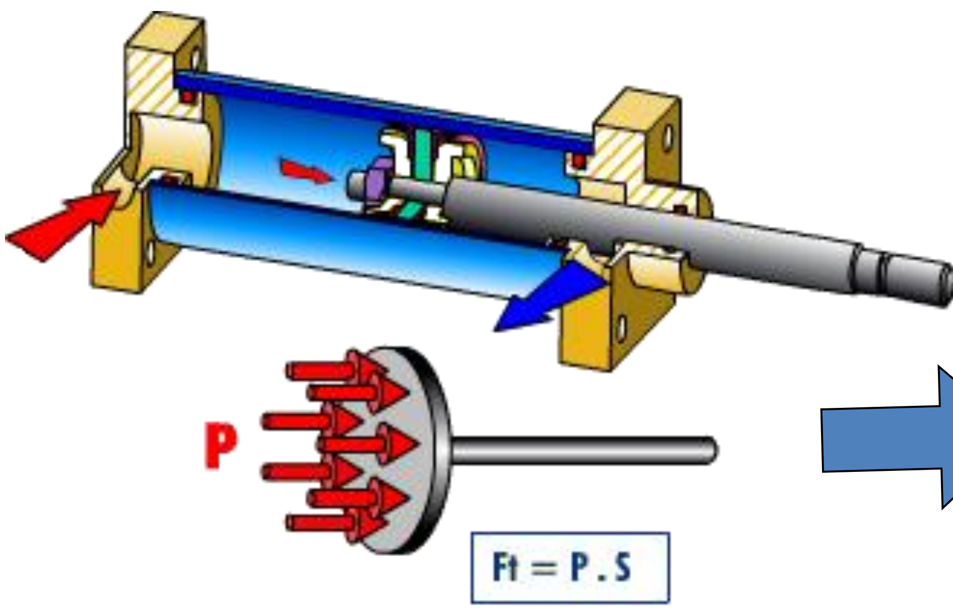
Les actions mécaniques sont classées en deux familles:

➔ Les **actions mécaniques a distance** (sans contact)

➔ Les **actions mécaniques de contact** (dans les liaisons mécaniques)

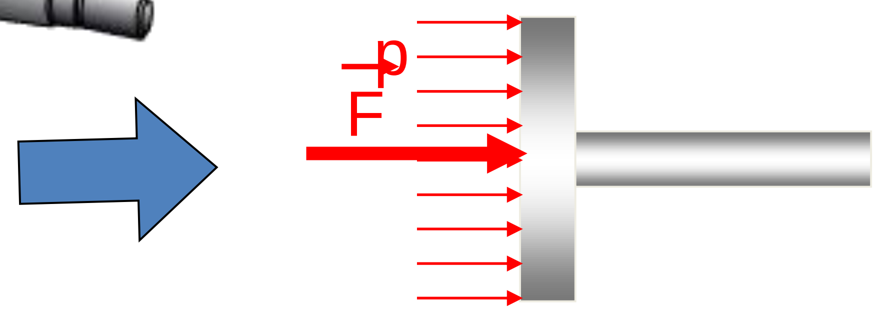
- ACTION PONCTUELLE
- ACTION répartie sur une ligne :
- ACTION répartie sur une surface : Exemple : Action d'un fluide sous pression

l'action répartie est modélisée par une seule action située au centre de pression



$$\boxed{F = p \cdot S}$$

F	p	S
(daN)	(bar)	(cm²)
(N)	(MPa)	(mm²)



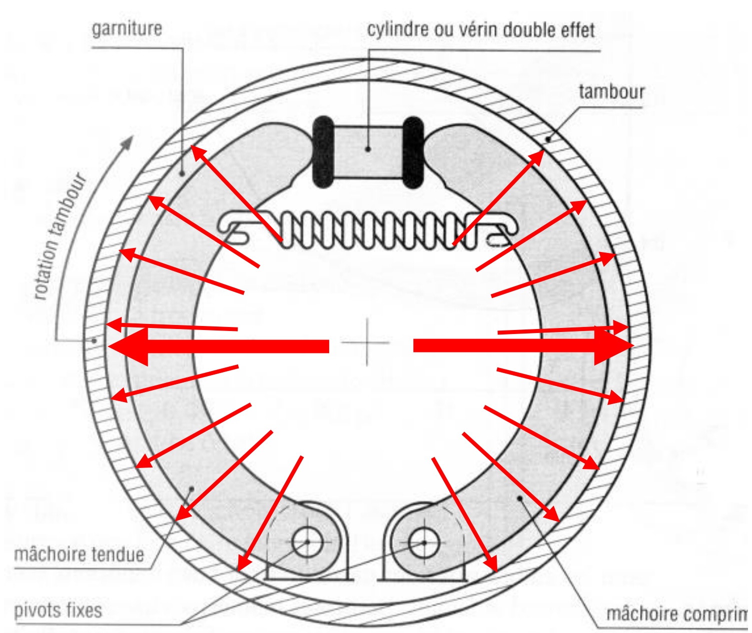
Les actions mécaniques sont classées en deux familles:

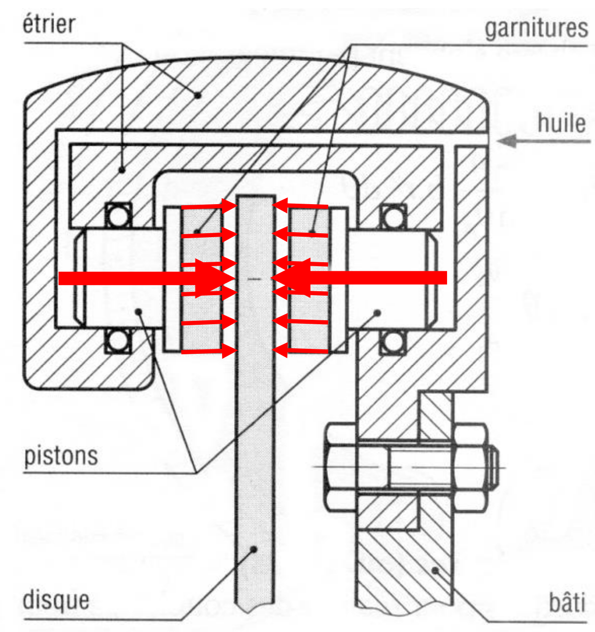
➔ Les **actions mécaniques a distance** (sans contact)

➔ Les **actions mécaniques de contact** (dans les liaisons mécaniques)

- ACTION PONCTUELLE
- ACTION répartie sur une ligne :
- ACTION répartie sur une surface : Exemple 2 : Action des plaquettes de freins

l'action répartie est modélisée par une seule action située au centre de pression





L'objectif de la statique est de calculer l'ensemble des actions mécaniques appliquées à un solide en équilibre.

Cette phrase implique 2 choses :

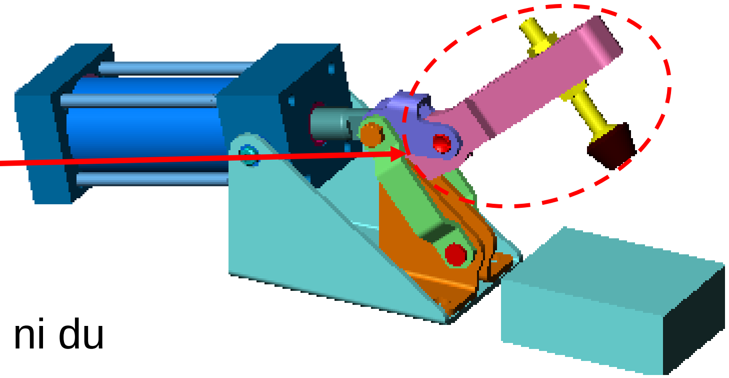
- Il faut commencer par faire l'inventaire de toutes les actions mécaniques exercées par l'environnement sur le solide, sans en oublier, en isolant le solide étudié.

- En supposant que le solide est en équilibre, on peut appliquer le principe fondamental de la statique.

Isoler un solide consiste à enlever tous les éléments extérieurs à ce solide, et à les **remplacer** par l'action mécanique qu'ils exercent sur ce solide.

Exemple : mécanisme de bridage ;

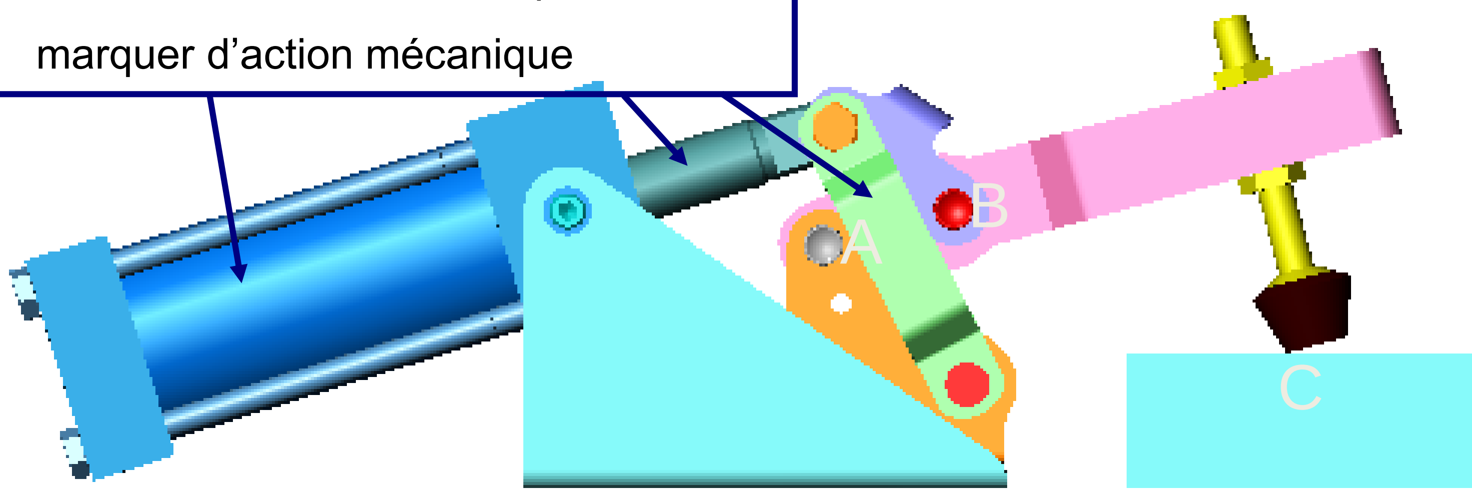
isolons le levier d'appui



Ce levier reçoit :

- aucune action directe du vérin ni de sa tige ni du levier intermédiaire.

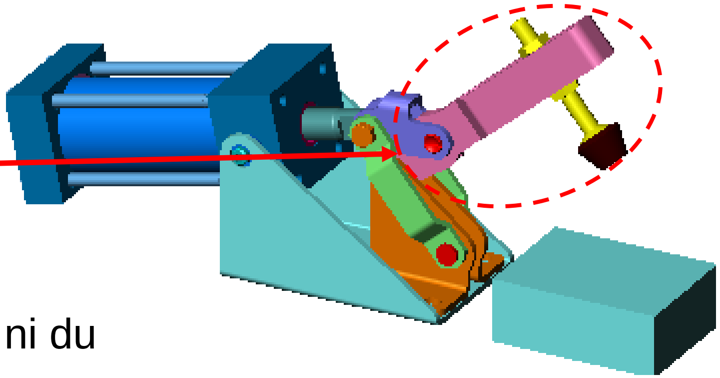
➔ On « enlève » donc ces 3 pièces sans marquer d'action mécanique



Isoler un solide consiste à enlever tous les éléments extérieurs à ce solide, et à les **remplacer** par l’action mécanique qu’ils exercent sur ce solide.

Exemple : mécanisme de bridage ;

isolons le levier d’appui

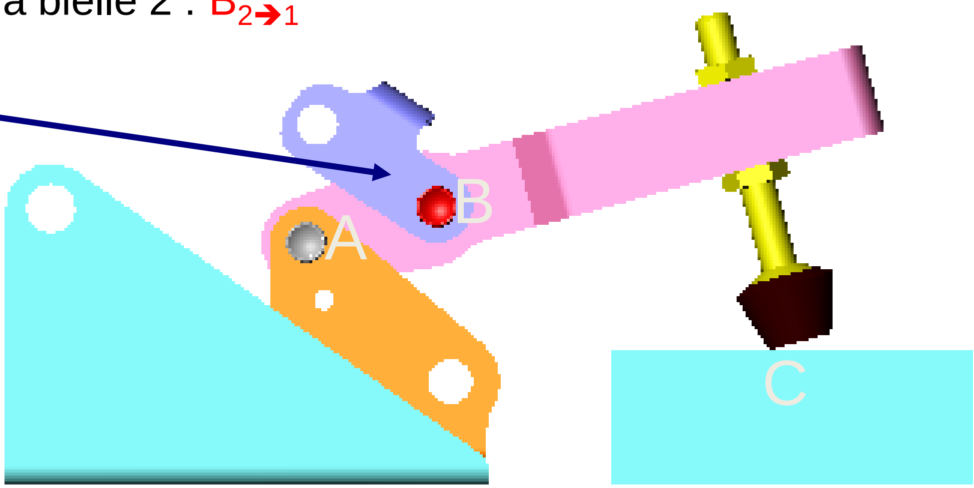


Ce levier reçoit :

- aucune action directe du vérin ni de sa tige ni du levier intermédiaire.

- une action en B exercée par la bielle 2 : $B_{2\rightarrow 1}$

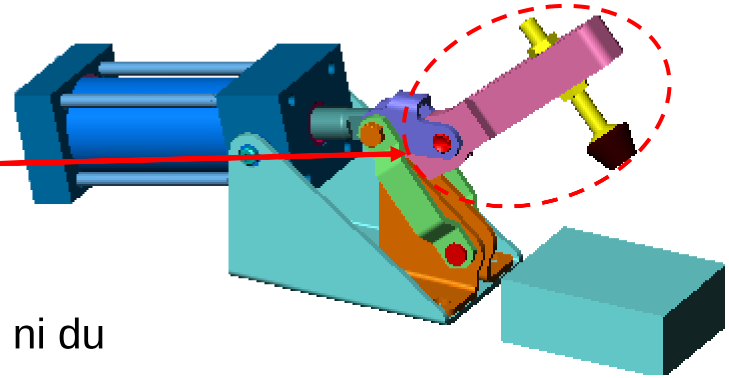
➔ Cette fois, on enlève le solide 2 et on le remplace par l’action mécanique qu’il exerce sur le solide isolé (solide 1)



Isoler un solide consiste à enlever tous les éléments extérieurs à ce solide, et à les **remplacer** par l'action mécanique qu'ils exercent sur ce solide.

Exemple : mécanisme de bridage ;

isolons le levier d'appui



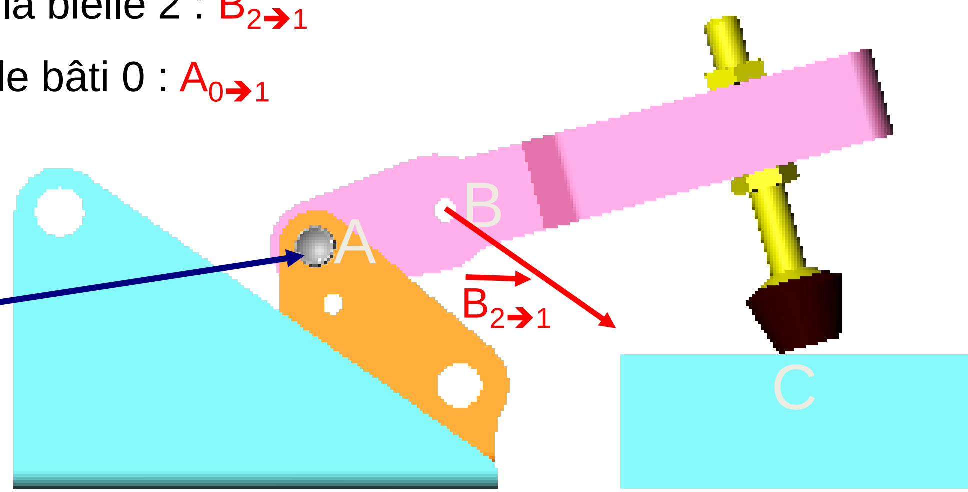
Ce levier reçoit :

- aucune action directe du vérin ni de sa tige ni du levier intermédiaire.

- une action en B exercée par la bielle 2 : $B_{2\to1}$

- une action en A exercée par le bâti 0 : $A_{0\to1}$

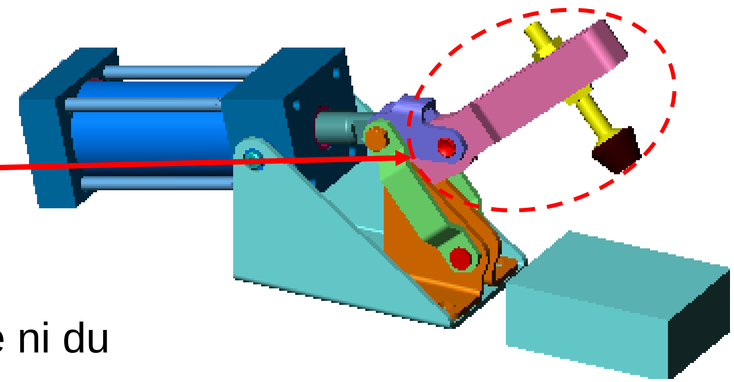
➔ Comme précédemment, on enlève le solide 0 et on le remplace par l'action mécanique qu'il exerce sur le solide isolé (solide 1)



Isoler un solide consiste à enlever tous les éléments extérieurs à ce solide, et à les **remplacer** par l'action mécanique qu'ils exercent sur ce solide.

Exemple : mécanisme de bridage ;

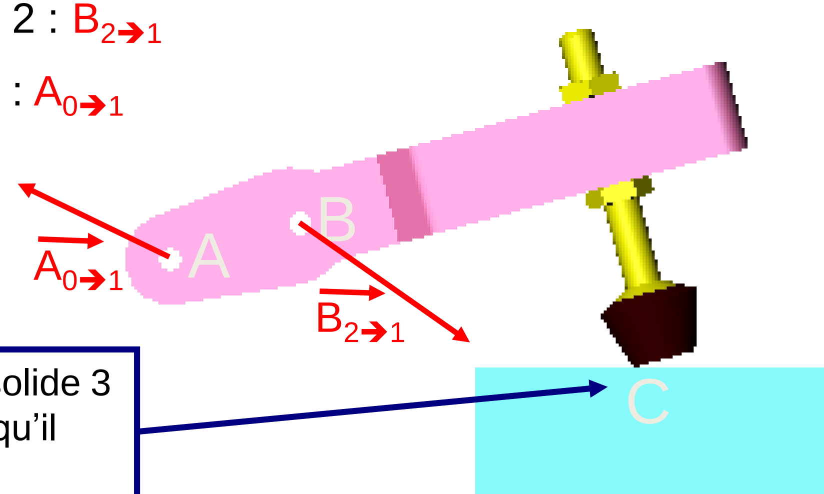
isolons le levier d'appui



Ce levier reçoit :

- aucune action directe du vérin ni de sa tige ni du levier intermédiaire.

.
- une action en B exercée par la bielle 2 : $B_{2\rightarrow 1}$
- une action en A exercée par le bâti 0 : $A_{0\rightarrow 1}$
- une action en C exercée par la pièce 3 : $C_{3\rightarrow 1}$

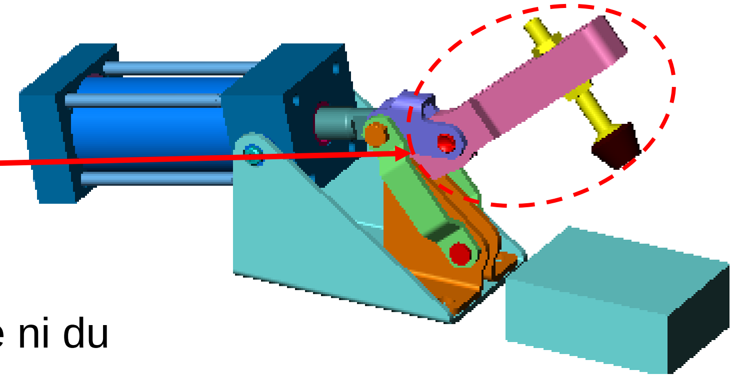


➔ Comme précédemment, on enlève le solide 3 et on le remplace par l'action mécanique qu'il exerce sur le solide isolé (solide 1)

Isoler un solide consiste à enlever tous les éléments extérieurs à ce solide, et à les **remplacer** par l'action mécanique qu'ils exercent sur ce solide.

Exemple : mécanisme de bridage ;

isolons le levier d'appui

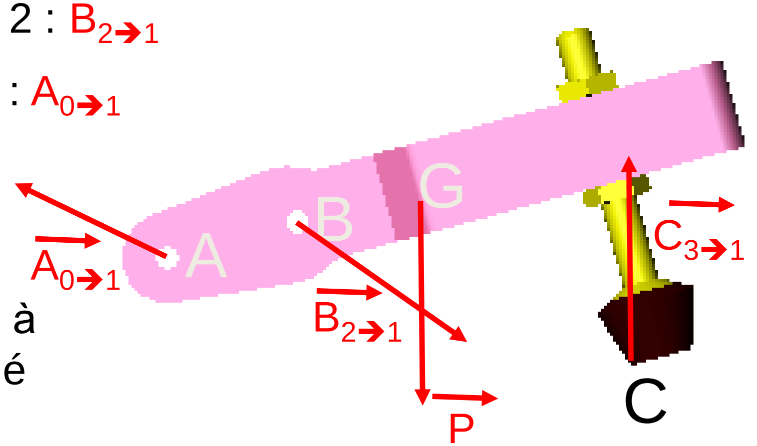


Ce levier reçoit :

- aucune action directe du vérin ni de sa tige ni du levier intermédiaire.

.

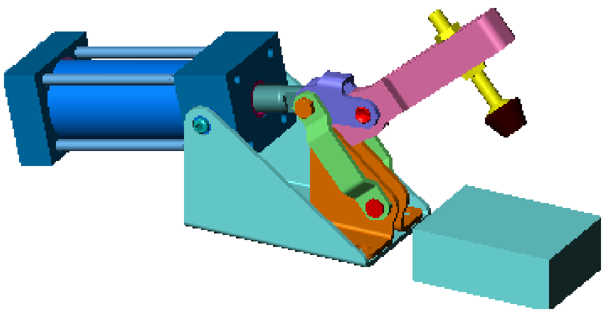
- une action en B exercée par la bielle 2 : $B_{2\rightarrow1}$
- une action en A exercée par le bâti 0 : $A_{0\rightarrow1}$
- une action en C exercée par la pièce 3 : $C_{3\rightarrow1}$

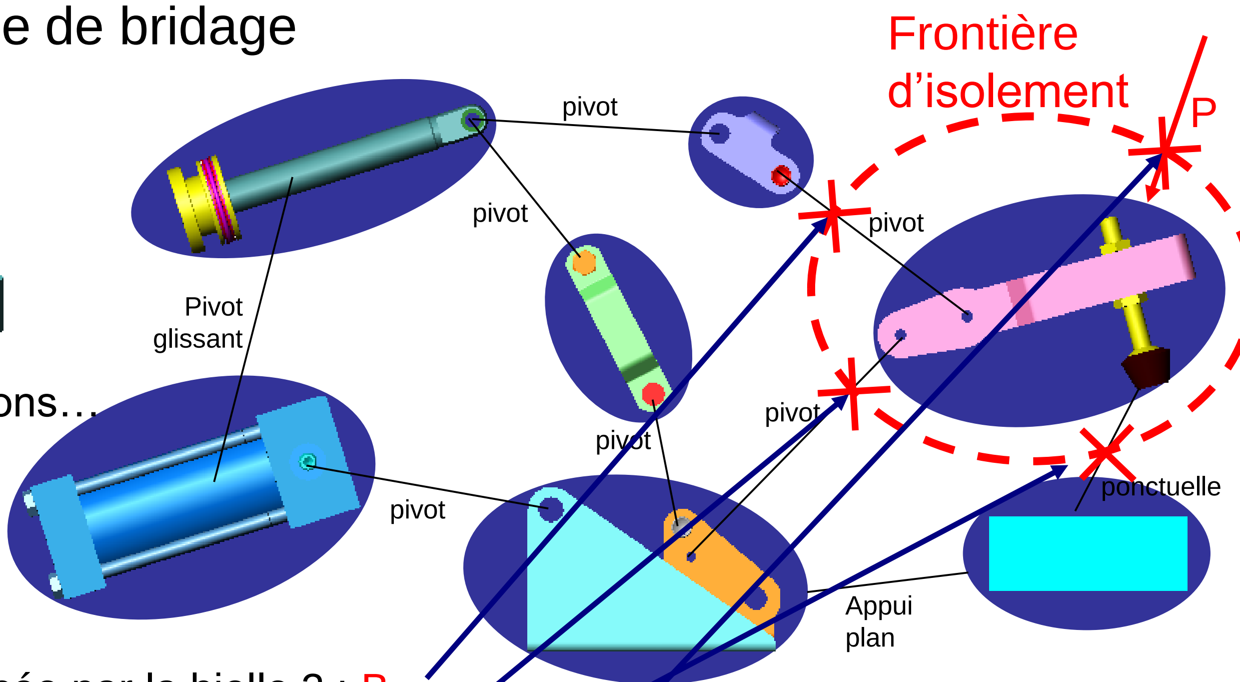


- …et il ne faut pas oublier les actions à distance, telles que le poids P appliqué au centre de gravité.

Pour n'oublier aucune action mécanique, il est possible de s'appuyer sur le graphe des liaisons du mécanisme.
Chaque liaison fait apparaître des forces et/ou des moments.

Exemple : mécanisme de bridage





Il suffit d'observer les liaisons…

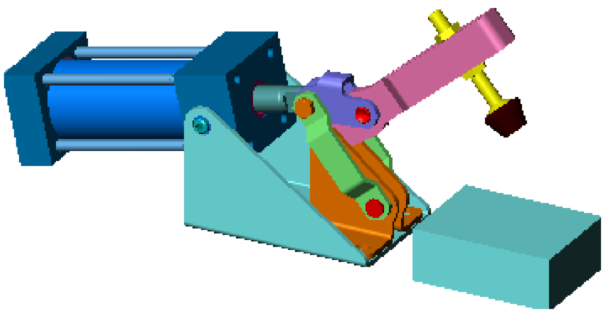
…et d'imaginer une frontière qui "isole" l'ensemble voulu.

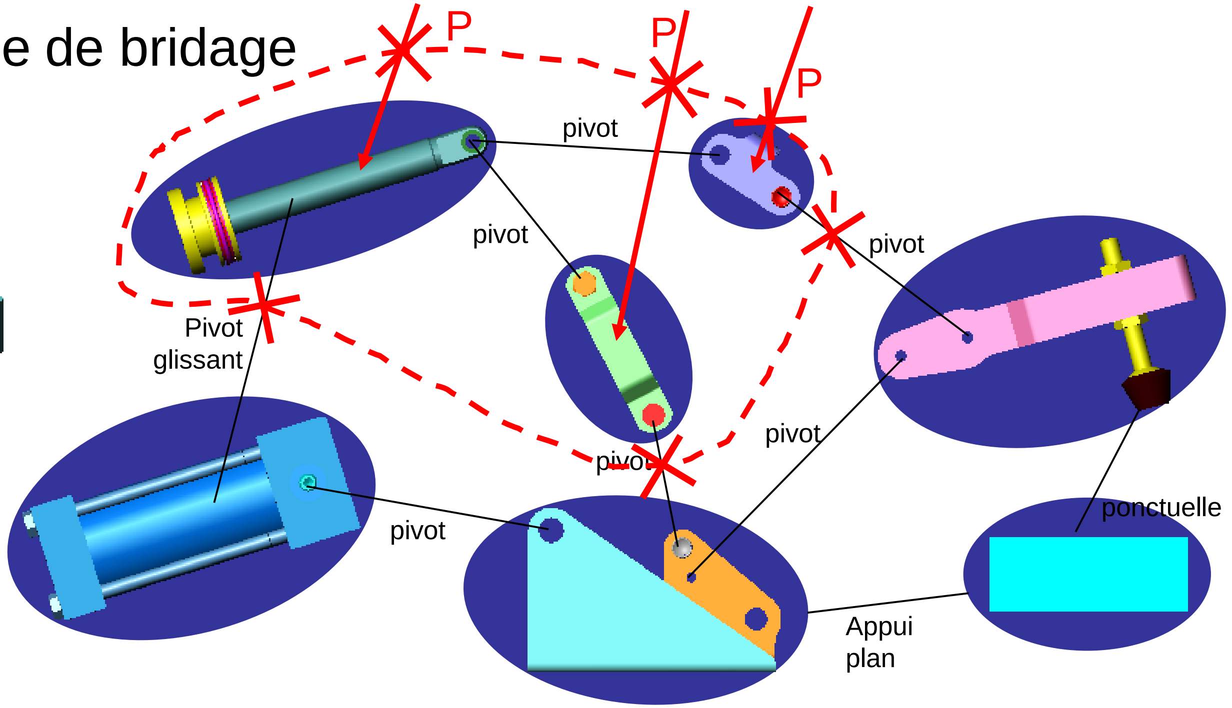
- une action en B exercée par la bielle 2 : $B_{2\rightarrow 1}$
- une action en A exercée par le bâti 0 : $A_{0\rightarrow 1}$
- une action en C exercée par la pièce 3 : $C_{3\rightarrow 1}$
- Ne pas oublier les actions à distance : le poids P

Chaque trait de liaison peut être considéré comme un « trait d'action ».

Pour n’oublier aucune action mécanique, il est possible de s’appuyer sur le graphe des liaisons du mécanisme.
Chaque liaison fait apparaître des forces et/ou des moments.

Exemple : mécanisme de bridage



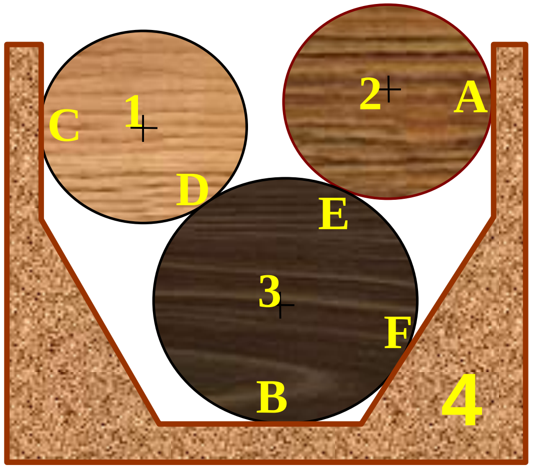


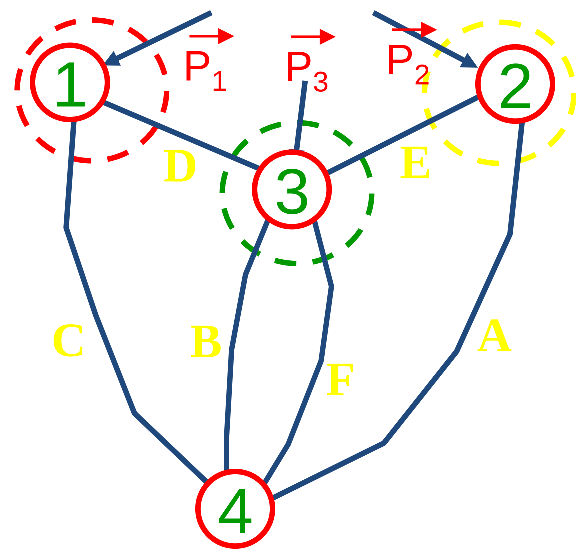
Il est aussi possible d’isoler plusieurs solides à la fois. Dans ce cas, la frontière d’isolement englobe plusieurs solides, et seules, les liaisons qui coupent la frontière sont considérées. Les liaisons « intérieures » ne décrivent que des actions mécaniques intérieures et sont alors ignorées.

Pour n'oublier aucune action mécanique, il est possible de s'appuyer sur le graphe des liaisons du mécanisme.
Chaque liaison fait apparaître des forces et/ou des moments.

Exemple 2 : transporteur de troncs d'arbres

Système isolé	ACTIONS EXTERIEURES	ACTIONS INTERIEURES
1	$\overrightarrow{C_{4\rightarrow1}}$ $\overrightarrow{D_{3\rightarrow1}}$ $\overrightarrow{P_1}$	néant
2	$\overrightarrow{A_{4\rightarrow2}}$ $\overrightarrow{E_{3\rightarrow2}}$ $\overrightarrow{P_2}$	néant
3	$\overrightarrow{D_{1\rightarrow3}}$ $\overrightarrow{E_{2\rightarrow3}}$ $\overrightarrow{F_{4\rightarrow3}}$ $\overrightarrow{B_{4\rightarrow3}}$ $\overrightarrow{P_3}$	néant
(1+2)		
(1+3)		
(2+3)		
(1+2+3)		

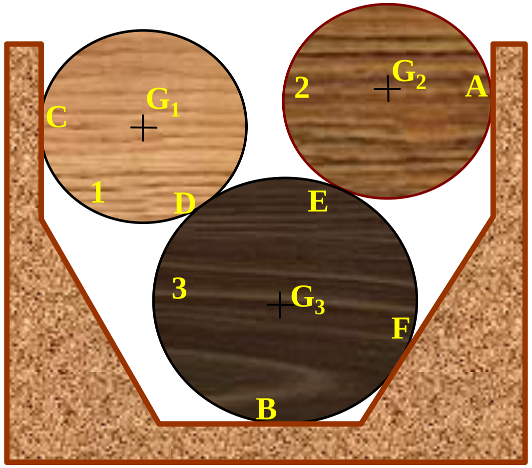


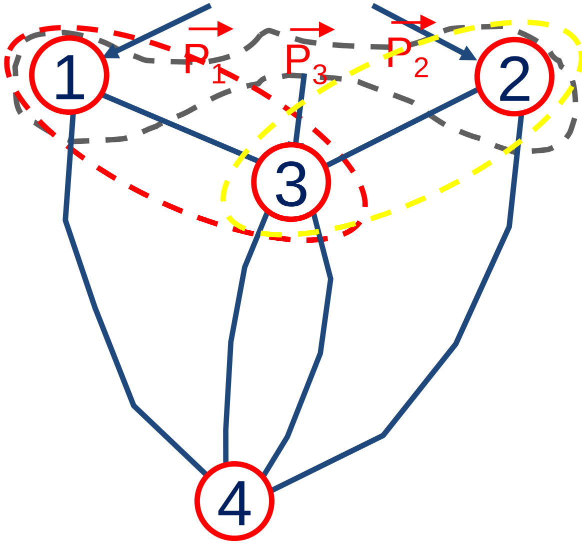


Pour n'oublier aucune action mécanique, il est possible de s'appuyer sur le graphe des liaisons du mécanisme.
Chaque liaison fait apparaître des forces et/ou des moments.

Exemple 2 : transporteur de troncs d'arbres

Système isolé	ACTIONS EXTERIEURES	ACTIONS INTERIEURES
1	$\vec{C}_{4\to1}$ $\vec{D}_{3\to1}$ $\vec{P}_1$	néant
2	$\vec{A}_{4\to2}$ $\vec{E}_{3\to2}$ $\vec{P}_2$	néant
3	$\vec{D}_{1\to3}$ $\vec{E}_{2\to3}$ $\vec{F}_{4\to3}$ $\vec{B}_{4\to3}$ $\vec{P}_3$	néant
(1+2)	$\vec{C}_{4\to1}$ $\vec{A}_{4\to2}$ $\vec{D}_{3\to1}$ $\vec{E}_{3\to2}$ $\vec{P}_1$ $\vec{P}_2$	néant
(1+3)	$\vec{C}_{4\to1}$ $\vec{E}_{2\to3}$ $\vec{F}_{4\to3}$ $\vec{B}_{4\to3}$ $\vec{P}_1$ $\vec{P}_3$	$\vec{D}_{3\to1}$ $\vec{D}_{1\to3}$
(2+3)	$\vec{A}_{4\to2}$ $\vec{D}_{1\to3}$ $\vec{F}_{4\to3}$ $\vec{B}_{4\to3}$ $\vec{P}_2$ $\vec{P}_3$	$\vec{E}_{3\to2}$ $\vec{E}_{2\to3}$
(1+2+3)		



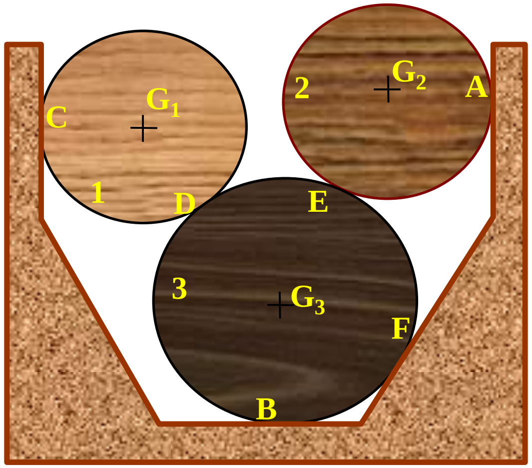


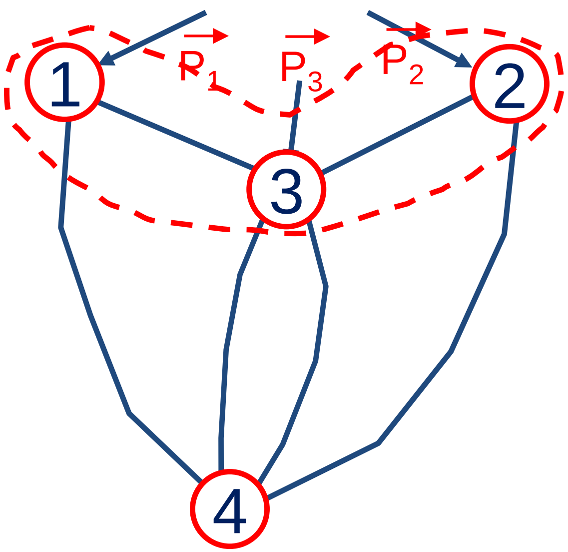
Pour n'oublier aucune action mécanique, il est possible de s'appuyer sur le graphe des liaisons du mécanisme.

Chaque liaison fait apparaître des forces et/ou des moments.

Exemple 2 : transporteur de troncs d'arbres

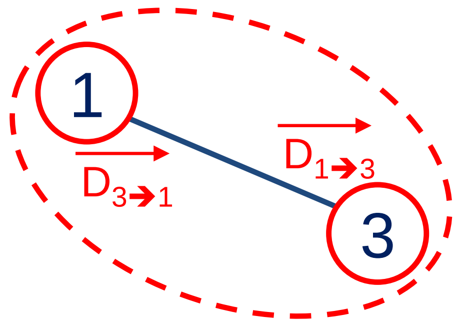
Système isolé	ACTIONS EXTERIEURES	ACTIONS INTERIEURES
1	$\overrightarrow{C_{4\rightarrow1}}$ $\overrightarrow{D_{3\rightarrow1}}$ $\overrightarrow{P_1}$	néant
2	$\overrightarrow{A_{4\rightarrow2}}$ $\overrightarrow{E_{3\rightarrow2}}$ $\overrightarrow{P_2}$	néant
3	$\overrightarrow{D_{1\rightarrow3}}$ $\overrightarrow{E_{2\rightarrow3}}$ $\overrightarrow{F_{4\rightarrow3}}$ $\overrightarrow{B_{4\rightarrow3}}$ $\overrightarrow{P_3}$	néant
(1+2)	$\overrightarrow{C_{4\rightarrow1}}$ $\overrightarrow{A_{4\rightarrow2}}$ $\overrightarrow{D_{3\rightarrow1}}$ $\overrightarrow{E_{3\rightarrow2}}$ $\overrightarrow{P_1}$ $\overrightarrow{P_2}$	néant
(1+3)	$\overrightarrow{C_{4\rightarrow1}}$ $\overrightarrow{E_{2\rightarrow3}}$ $\overrightarrow{F_{4\rightarrow3}}$ $\overrightarrow{B_{4\rightarrow3}}$ $\overrightarrow{P_1}$ $\overrightarrow{P_3}$	$\overrightarrow{D_{3\rightarrow1}}$ $\overrightarrow{D_{1\rightarrow3}}$
(2+3)	$\overrightarrow{A_{4\rightarrow2}}$ $\overrightarrow{D_{1\rightarrow3}}$ $\overrightarrow{F_{4\rightarrow3}}$ $\overrightarrow{B_{4\rightarrow3}}$ $\overrightarrow{P_2}$ $\overrightarrow{P_3}$	$\overrightarrow{E_{3\rightarrow2}}$ $\overrightarrow{E_{2\rightarrow3}}$
(1+2+3)	$\overrightarrow{A_{4\rightarrow2}}$ $\overrightarrow{B_{4\rightarrow3}}$ $\overrightarrow{C_{4\rightarrow1}}$ $\overrightarrow{F_{4\rightarrow3}}$ $\overrightarrow{P_1}$ $\overrightarrow{P_2}$ $\overrightarrow{P_3}$	$\overrightarrow{D_{3\rightarrow1}}$ $\overrightarrow{D_{1\rightarrow3}}$ $\overrightarrow{E_{2\rightarrow3}}$ $\overrightarrow{E_{3\rightarrow2}}$





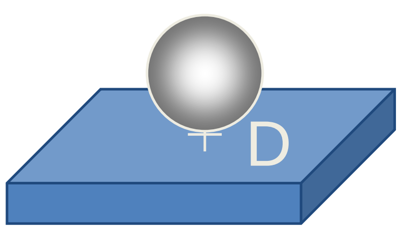
Actions mutuelles

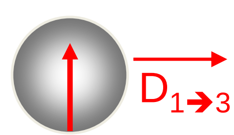
Dans l'exemple précédent, on se rend compte que les actions mécaniques dans une liaison peuvent s'exprimer de 2 façons suivant que l'on isole l'un ou l'autre des 2 solides.

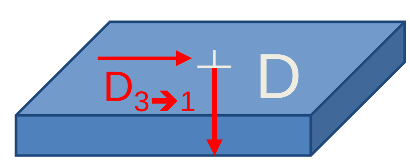


Ces deux actions mécaniques représentent la même chose. La différence réside dans le sens des vecteurs. Ils sont opposés :

$$\boxed{\vec{D}_{1\to3} = - \vec{D}_{3\to1}}$$





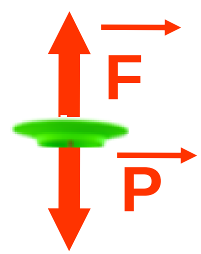


Équilibre d’un solide

Lorsqu’un solide a une vitesse constante (quelle que soit cette vitesse) on dit qu’il est en équilibre sous l’effet des actions mécaniques extérieures .

Prenons l’exemple d’une assiette soutenue par une baguette :

Que subit l’assiette ?



avec $\vec{F} = -\vec{P}$

La baguette, comme l’assiette, est

en équilibre

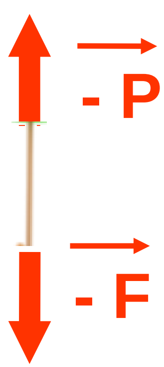
sous l'action de

deux forces

qui sont

"égales et opposées"

Que subit la baguette ?



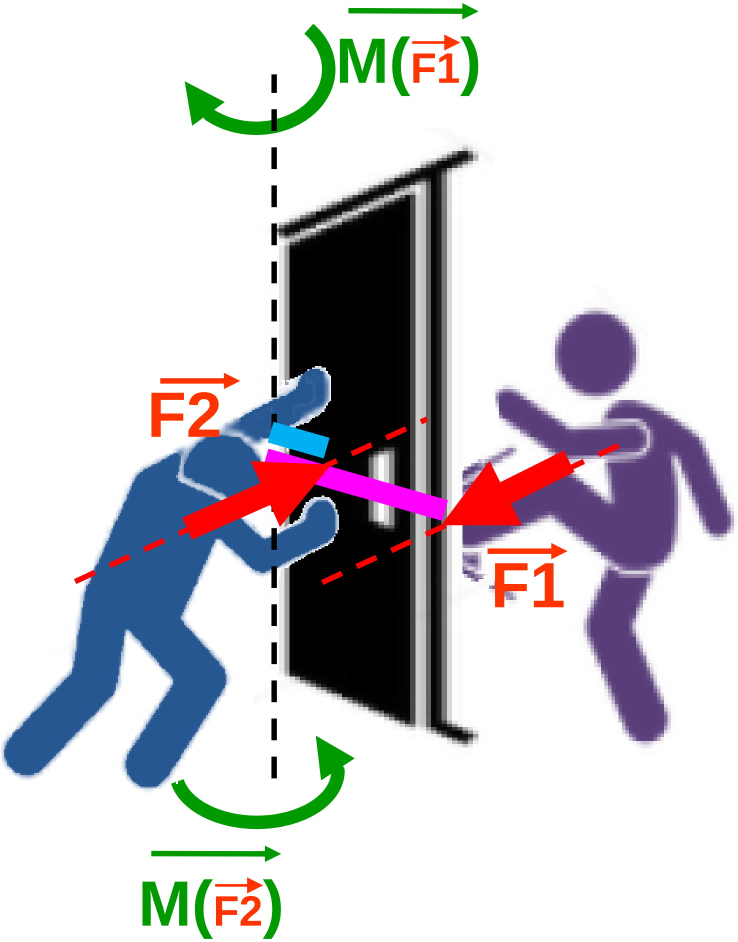
1^{ere} condition d'EQUILIBRE d'un solide :

« Théorème des FORCES »

La somme des **FORCES EXTERIEURES** appliquées à un solide en équilibre est **NULLE**

$$\vec{S} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_1} + \cdots + \overrightarrow{F_n} = \overrightarrow{0}$$

De même, reprenons l'exemple de la porte…



$\vec{F1} = -\vec{F2}$

Les forces s'équilibrent…

Mais les moments ?

$$\begin{cases} M(F1) = d1 \times F1 \\ M(F2) = d2 \times F2 \end{cases}$$

$\vec{F1}$ et $\vec{F2}$ sont opposés donc les moments s'opposent aussi mais ne s'équilibrent pas car d2 < d1

Donc la vitesse de rotation de la porte varie car
la somme des moments n'est pas nulle

2eme condition d'EQUILIBRE d'un solide

« Théorème des MOMENTS »

La somme des **MOMENTS DES FORCES EXTERIEURES** appliqués à un solide en équilibre est NULLE

$$\overrightarrow{\mathbf{M_A}} = \overrightarrow{\mathbf{M_{A(\overrightarrow{F_1})}}} + \overrightarrow{\mathbf{M_{A(\overrightarrow{F_2})}}} + \cdots + \overrightarrow{\mathbf{M_{A(\overrightarrow{F_n})}}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$$

Équilibre d'un solide

On s'aperçoit donc que pour être en équilibre, il faut que la somme des forces extérieures ET la somme des moments extérieurs appliqués sur un solide soient nulles.
Ceci nous amène à formuler le…

PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA STATIQUE (PFS) :

Dans un repère GALILEEN, pour tout système isolé (S) en équilibre par rapport à ce repère, la somme de toutes les actions mécaniques extérieures exercées sur (S), est nulle.

$$\overrightarrow{S} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \dots + \overrightarrow{F_n} = \overrightarrow{0}$$

$$\overrightarrow{M_{/A}} = \overrightarrow{M_{/A(\overrightarrow{F1})}} + \overrightarrow{M_{/A(\overrightarrow{F2})}} + \dots + \overrightarrow{M_{/A(\overrightarrow{Fn})}} = \overrightarrow{0}$$

Méthodes de résolution

L'objectif de la statique est de calculer l'ensemble des actions mécaniques appliquées à un solide en équilibre.

Pour résoudre de tels problèmes, nous disposons de plusieurs méthodes de résolution, réparties en 2 « familles »

Analytique (utilisée pour tout problème et surtout ceux en 3D)

- Théorème des forces (cas de trois forces colinéaires)
- Théorème des moments (cas de trois forces parallèles)
- Méthode des champs de vecteurs

Graphique (Utilisée pour les problèmes plans **sans moments**)

- Solide soumis à **deux** forces
- Solide soumis à **trois** forces

Méthodes de résolution

Quel que soit le problème à résoudre, la méthode devra commencer par la séquence qui suit afin de bien choisir la méthode de résolution.

Isoler le système étudié

Aidez-vous du graphe des liaisons

Modéliser les actions extérieures et les nommer

N'oubliez pas les actions à distance !

Faire le bilan de ces actions

On peut un tableau sur ce modèle :

Nom de l'action	Point d'appl	Direction et sens	Intensité

Mais une liste bien faite est largement suffisante.

Résoudre le problème

Choisir la bonne méthode : Analytique ou graphique

Cette séquence est à retenir

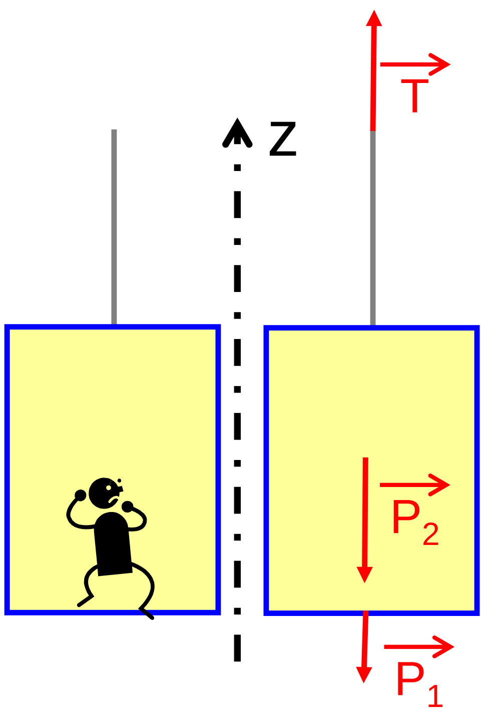
Statique analytique

Analytique (utilisée pour tout problème et surtout ceux en 3D)
- **Théorème des forces**
- Théorème des moments
- Méthode des champs

Le théorème des forces est généralement utilisé dans le cas, le plus simple, où toutes les forces appliquées à un solide sont alignées.
La somme vectorielle est alors suffisante.

$$\vec{S} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \ldots + \vec{F_n} = \vec{0}$$

Exemple : passager dans un ascenseur :



- Choix du solide à isoler : l'ascenseur avec son câble
- Bilan des actions :
  - Poids du passager P_1=750 N
  - Poids de l'ascenseur P_2 3000 N
  - Tension du câble T = ?

Toutes ces forces sont alignées

- Application du théorème des forces :

$$\vec{P_1} + \vec{P_2} + \vec{T} = \vec{0}$$

Attention, l'application numérique n'est pas directe ! Il faut tenir compte du sens des vecteurs forces par rapport au sens de l'axe z (arbitraire).

$$- P_1 - P_2 + T = 0$$

- Application numérique : $T = P_1 + P_2 = 3750$ N

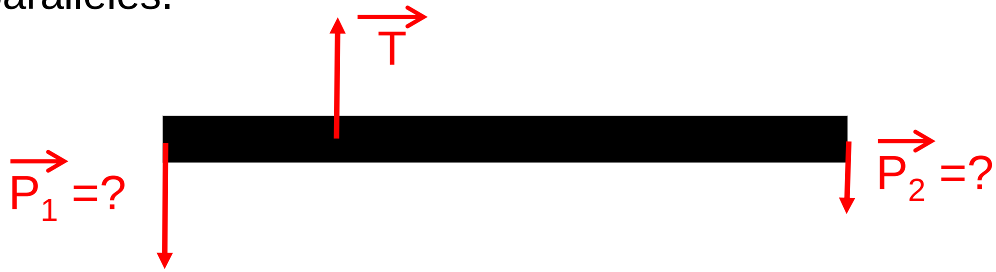
Cette méthode est à retenir

Analytique (utilisée pour tout problème et surtout ceux en 3D)

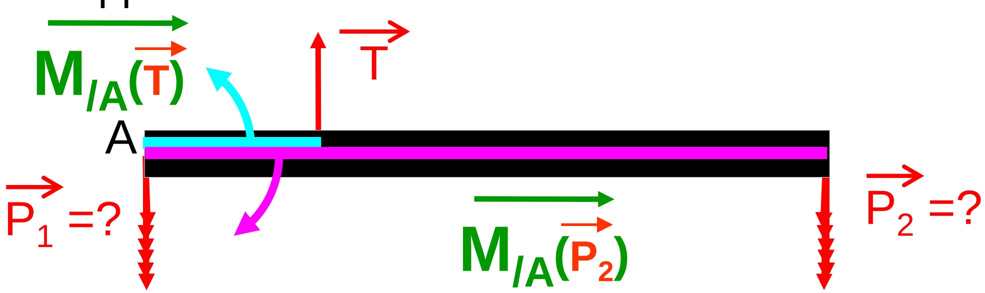
- Théorème des forces
- Théorème des moments
- Méthode des champs

Statique analytique

Le théorème des moments est utilisé lorsque l'on a plusieurs forces parallèles.



En effet le théorème des forces, seul, s'avère insuffisant car des moments de forces apparaissent.



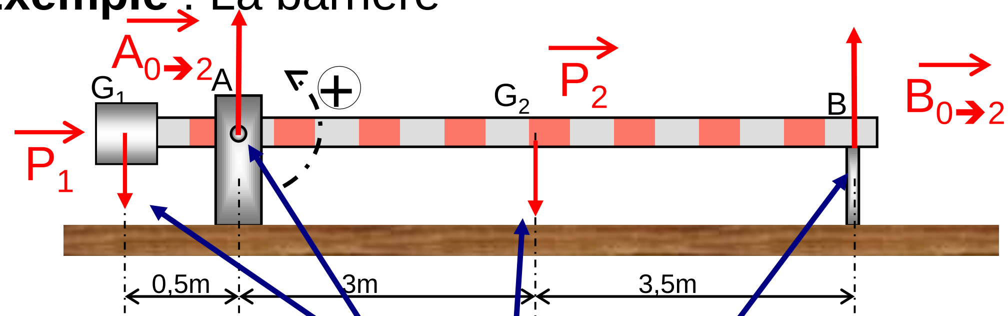
$$\vec{P_1} + \vec{P_2} + \vec{T} = \vec{0}$$

Il faut donc aussi exprimer les moments de ces forces par rapport à un point (judicieusement choisi, par exemple le point A).

$$\vec{M}_{/A} = \vec{M}_{/A(\vec{P1})} + \vec{M}_{/A(\vec{P2})} + \ldots + \vec{M}_{/A(\vec{T})} = \vec{0}$$

Statique analytique

Exemple : La barrière



Analytique (utilisée pour tout problème et surtout ceux en 3D)

- Théorème des forces
- Théorème des moments
- Méthode des champs

- On choisit le solide à isoler : La lisse (2) avec son contrepoids (1)
- Bilan des actions : - Poids du contrepoids P_1=1000 N
  - Poids de la lisse P_2 = 200 N
  - Action du pivot $A_{0\to2}$ = ?
  - Action de la butée $B_{0\to2}$ = ?

Toutes ces forces sont parallèles

donc

méthode est à retenir

- Application du théorème des moments :

$$\overrightarrow{M_{/A}} = \overrightarrow{M_{/A(\vec{P}_1)}} + \overrightarrow{M_{/A(\vec{P}_2)}} + \overrightarrow{M_{/A(\vec{A}_{0\to2})}} + \overrightarrow{M_{/A(\vec{B}_{0\to2})}} = \vec{0}$$

Attention, pour passer de la relation vectorielle à la relation algébrique, il faut tenir compte du signe du moment par rapport au sens choisi (arbitraire mais de préférence direct).

$$M_{/A} = M_{/A(P_1)} - M_{/A(P_2)} + M_{/A(A_{0\to2})} + M_{/A(B_{0\to2})} = 0$$

$$AG_1.P_1 - AG_2.\,P_2 + \quad 0 \quad + AB.B_{0\to2} = 0$$

- Application numérique :

$$B_{0\to2} = (AG_2.\,P_2 - AG_1.P_1) / AB \quad = (3*200 - 0.5*1000) / 6.5 = 15.38 \text{ N}$$

Statique analytique- Les champs

Analytique (utilisée pour tout problème et surtout ceux en 3D)

- Théorème des forces
- Théorème des moments
- Méthode des champs

La résolution par les champs de vecteurs est de loin la plus puissante, la plus rigoureuse, mais aussi la plus longue. Elle n'est à utiliser que lorsque les autres méthodes ne sont pas adaptées.

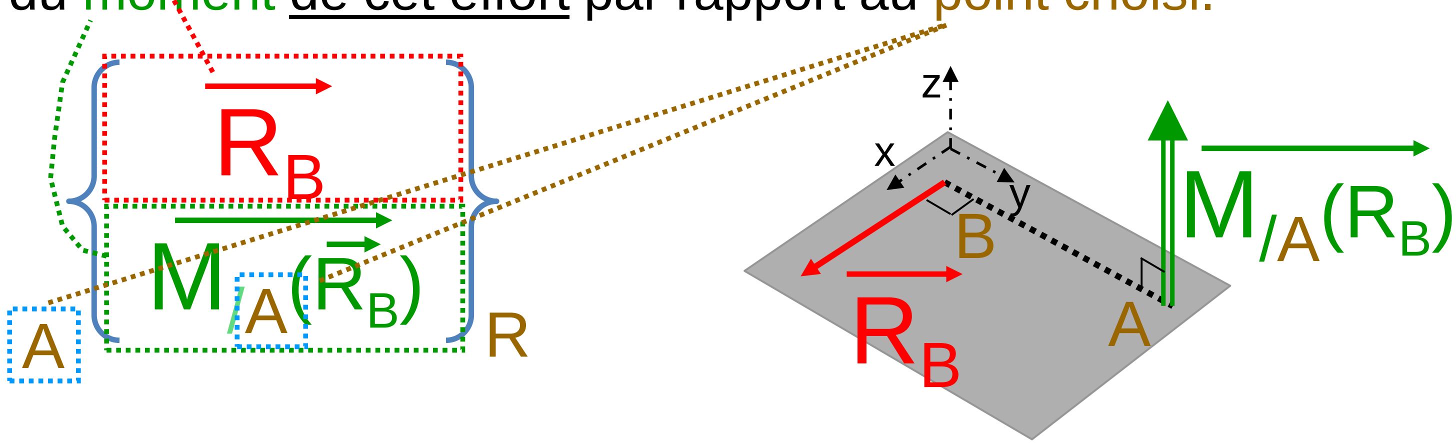
Avant d'aborder cette méthode de résolution, répondons à la question :

Qu'est-ce qu'un champs de vecteurs ?

Un champs de vecteurs est une description complète d'une action mécanique, exprimé par rapport à un point particulier (point choisi).

On y trouve :

- la valeur de l'effort exercé en B (aussi appelé « Résultante »),
- la valeur du moment de cet effort par rapport au point choisi.

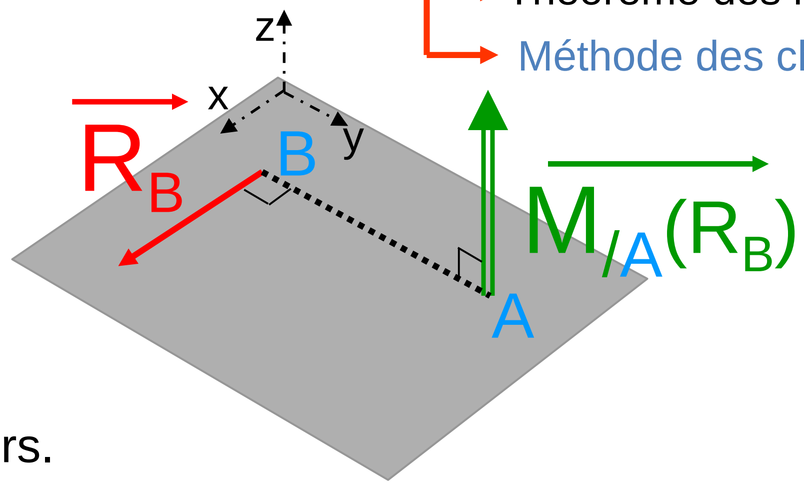


Statique analytique- Les champs

Analytique (utilisée pour tout problème et surtout ceux en 3D)
- Théorème des forces
- Théorème des moments
- Méthode des champs

…Qu'est-ce qu'un champs de vecteurs ? (suite)

$$_A\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{R_B}\\ \overrightarrow{M_{/A}(R_B)}\end{matrix}\right\}_R$$



Ces deux termes sont des vecteurs.

Ils possèdent donc tous deux des coordonnées dans le repère x,y,z :

$$\overrightarrow{R_B}\ (X,Y,Z) \qquad \overrightarrow{M_{/A}(\overrightarrow{R_B})}\ (L,M,N)$$

Le champs de vecteurs de l'action mécanique $\overrightarrow{R_B}$, exprimé au point A s'écrit donc :

$$\{\tau(\overrightarrow{R_B})\}_A = {}_A\left\{\begin{matrix} X & L\\ Y & M\\ Z & N\end{matrix}\right\}_R$$

Coordonnées de la résultante

Coordonnées du moment

Statique analytique- Les champs

Analytique (utilisée pour tout problème et surtout ceux en 3D)
- Théorème des forces
- Théorème des moments
- Méthode des champs

…Qu'est-ce qu'un champs de vecteurs ? (suite)

Exemples de champs particuliers :

• champs « couple »

$$\left\{\tau(\vec{C})\right\}_A = \left\{\begin{array}{c:c} 0 & C \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right\}_A$$

C'est un champs de vecteurs pour lequel la résultan…

• « glisseur »

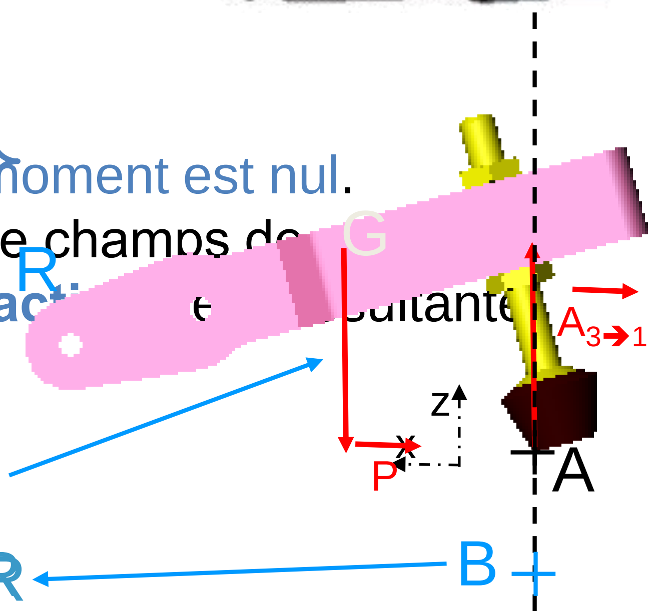
$$\left\{\tau(\vec{A}_{3\rightarrow1})\right\}_A = \left\{\begin{array}{c:c} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_A & 0 \end{array}\right\}_A$$

C'est un champs de vecteurs pour lequel le moment est nul.
C'est le cas, par exemple à chaque fois que le champs de … est exprimé en un point situé sur la **droite d'acti**… résultante.

De même pour le poids…

$$\left\{\tau(\vec{P})\right\}_G = \left\{\begin{array}{c:c} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_P & 0 \end{array}\right\}_G$$

$$\left\{\tau(\vec{A}_{3\rightarrow1})\right\}_B = \left\{\begin{array}{c:c} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_A & 0 \end{array}\right\}_B$$



Statique analytique- Les champs

Analytique (utilisée pour tout problème et surtout ceux en 3D)
- → Théorème des forces
- → Théorème des moments
- → Méthode des champs

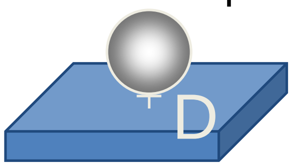
…Qu'est-ce qu'un champs de vecteurs ? (suite)

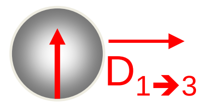
Exemples de champs de vecteurs particuliers :

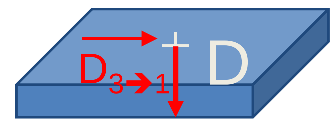
- Les champs de vecteurs « de liaison »

La présence d'un degré de liberté dans une liaison supprime toute possibilité de transmission d'action mécanique dans la direction correspondante.

Prenons l'exemple de la liaison ponctuelle :



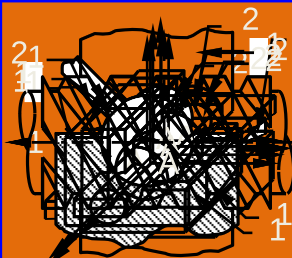




Le seul ddl bloqué est la translation suivant z…

…la seule action transmissible de la pièce 1 à la pièce 3 est précisément la force suivant z

La logique est la même pour toutes les autres liaisons…

Nom de la liaison	Exemple	Degrés de liberté	Champs des actions mécaniques transmissibles	Nombre d'inconnues de statique
[illegible]		[illegible]	[illegible]	[illegible] $L = -\frac{p}{2\pi} X$

Analytique (utilisée pour tout problème et surtout ceux en 3D)

- Théorème des forces
- Théorème des moments
- Méthode des champs

Statique analytique- Les champs

…Comment appliquer le PFS avec les champs de vecteurs ?

Simple! Le PFS nous invite à faire la somme des actions mécaniques. Or, il se trouve que chaque champs de vecteurs représente une action mécanique…

…il suffit donc d'effectuer la somme des champs de vecteurs et de déclarer cette somme égale à un champs nul.

$$\sum \left\{ T_{\overline{S} \rightarrow S} \right\}_A = \left\{ \begin{matrix} X_A & L_A \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{matrix} \right\}_A + \left\{ \begin{matrix} X_B & L_B \\ Y_B & M_B \\ Z_B & N_B \end{matrix} \right\}_A + \ldots + \left\{ \begin{matrix} X_i & L_i \\ Y_i & M_i \\ Z_i & N_i \end{matrix} \right\}_A = \left\{ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\}_A$$

On additionne ensuite membre à membre pour obtenir un système de 6 équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_A + X_B + \ldots + X_i = 0 \\ Y_A + Y_B + \ldots + Y_i = 0 \\ Z_A + Z_B + \ldots + Z_i = 0 \\ L_A + L_B + \ldots + L_i = 0 \\ M_A + M_B + \ldots + M_i = 0 \\ N_A + N_B + \ldots + N_i = 0 \end{array} \right.$$

champs de la liaison A exprimé au point A

champs de la liaison B exprimé au point A

champs de la liaison 'i' exprimé au point A

Statique analytique- Les champs

Analytique (utilisée pour tout problème et surtout ceux en 3D)

- Théorème des forces
- Théorème des moments
- Méthode des champs

…Comment appliquer le PFS avec les champs de vecteurs ?

Simple! Le PFS nous invite à faire la somme des actions mécaniques. Or, il se trouve que chaque champs représente une action mécanique…

…il suffit donc d'effectuer la somme des champs de vecteurs et de déclarer cette somme égale à un champs nul.

$$\sum \left\{ T_{\overline{S}\to S} \right\}_A = \begin{Bmatrix} X_A & L_A \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} X_B & L_B \\ Y_B & M_B \\ Z_B & N_B \end{Bmatrix}_A + \ldots + \begin{Bmatrix} X_i & L_i \\ Y_i & M_i \\ Z_i & N_i \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A$$

Cette somme de champs n'est possible que si TOUS les champs sont exprimés en un MEME POINT !

Le problème, c'est qu'au début, chaque action mécanique est exprimée en son point d'origine…

➔ Il faut donc trouver une méthode pour « transporter » les champs où bon nous semble

Statique analytique- Les champs

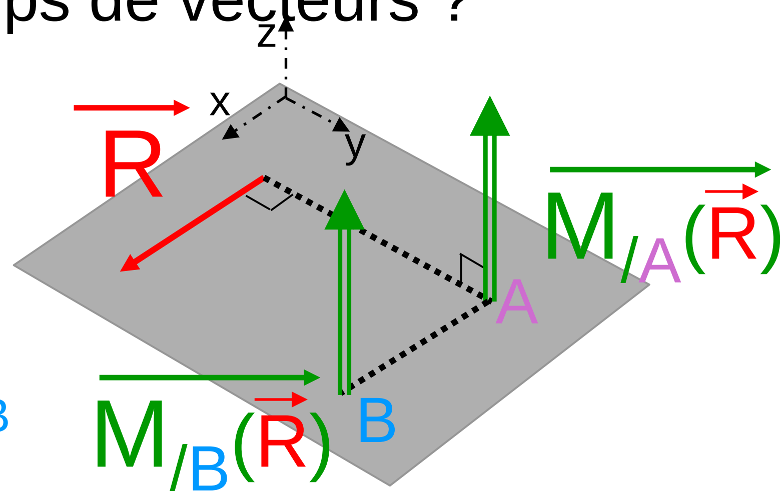
…Comment « Transporter » les champs de vecteurs ?

Analytique (utilisée pour tout problème et surtout ceux en 3D)
- Théorème des forces
- Théorème des moments
- Méthode des champs

$$\left\{ \begin{matrix} \vec{R} \\ \overrightarrow{M_{/B}(\vec{R})} \end{matrix} \right\}_B$$

champs de $\vec{R}$ exprimé au point B

$$\left\{ \begin{matrix} X & L_{/B} \\ Y & M_{/B} \\ Z & N_{/B} \end{matrix} \right\}_B$$



$$\left\{ \begin{matrix} \vec{R} \\ \overrightarrow{M_{/A}(\vec{R})} \end{matrix} \right\}_A$$

champs de $\vec{R}$ exprimé au point A

$$\left\{ \begin{matrix} X & L_{/A} \\ Y & M_{/A} \\ Z & N_{/A} \end{matrix} \right\}_A$$

(Oups !!!)

Quand on transporte un champs de vecteurs, la résultante ne varie pas, seul le moment varie

$$\overrightarrow{M_{/B}(\vec{R})} = \overrightarrow{M_{/A}(\vec{R})} + \vec{R} \wedge \overrightarrow{AB}$$

$$\begin{vmatrix} L_{/B} \\ M_{/B} \\ N_{/B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L_{/A} \\ M_{/A} \\ N_{/A} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L_{/A} + y_B - y_A \,.\, Z - z_B - z_A \,.\, Y \\ M_{/A} + z_B - z_A \,.\, X - x_B - x_A \,.\, Z \\ N_{/A} + x_B - x_A \,.\, Y - y_B - y_A \,.\, X \end{vmatrix}$$

Statique analytique- Les champs

Analytique (utilisée pour tout problème et surtout ceux en 3D)

- Théorème des forces
- Théorème des moments
- Méthode des champs

En résumé…

La méthode de résolution reste identique aux précédentes. Nous allons seulement devoir ajouter « *quelques* » étapes de calcul pour exprimer les champs de vecteurs en un point particulier.

- Choisir le solide à isoler *(voir graphe des liaisons)*
- Faire le bilan des actions *(pour choisir la bonne méthode)*
- Exprimer tous les champs de vecteurs en leur point d'application :

  champs de liaison, champs couple, glisseur…
- Transporter tous les champs de vecteurs en un même point :
- Appliquer le PFS :

  Écrire la somme des champs de vecteurs = 0

$$\sum \left\{ T_{\overline{S} \to S} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\}$$

  Additionner membre à membre
- Application numérique Résoudre le système d'équations

Cette méthode est à retenir

Statique plane

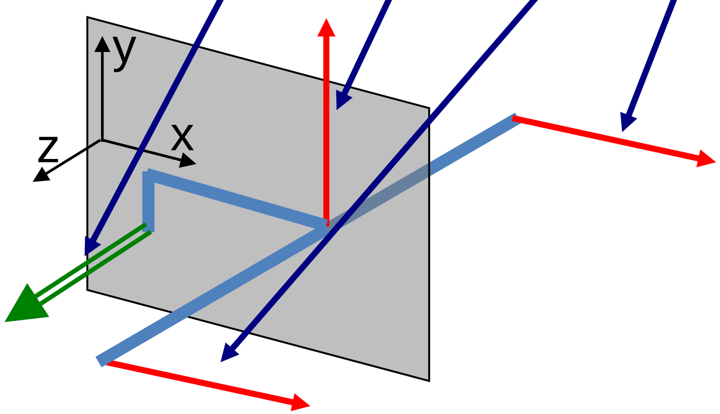
Qu’est-ce qu’un problème plan ?

Un problème plan est un problème pour lequel les actions mécaniques appliquées au solide :

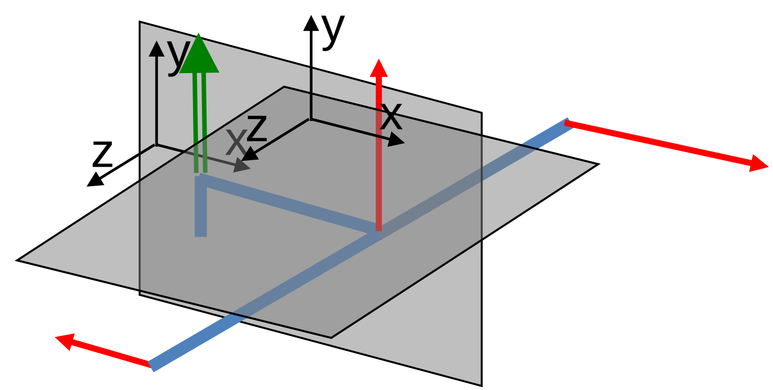
- soient des forces parallèles ou symétriques au plan de l’étude

- soient des moments d’axe perpendiculaires au plan de l’étude.

Exemple sur un solide isolé :



Problème plan



Problème spatial

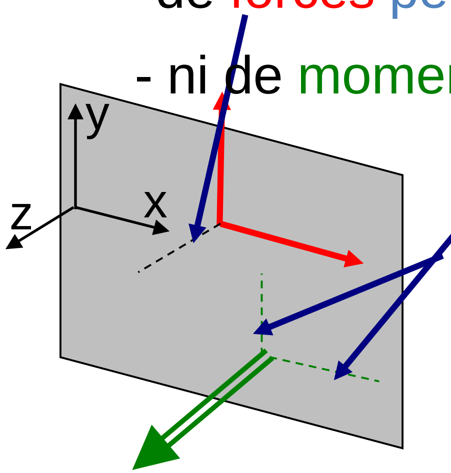
Statique plane

Quelle est l'utilité d'un problème plan ?

Cela va simplifier (et surtout alléger) nos calculs car dans un problème plan, nous ne pourrons pas avoir :

- de forces perpendiculaires au plan de l'étude
- ni de moments parallèles au plan de l'étude.

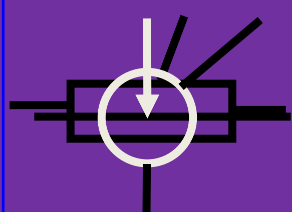
Ces actions seront considérées nulles



Donc, un champs de vecteurs ne possède plus que trois inconnues...

$$\left\{\begin{array}{c|c} X & - \\ Y & - \\ - & N \end{array}\right\}$$

Ex : cas d'un plan d'étude (x,y) ➔

Nom de la liaison	Exemple	Degrés de liberté	champs des actions mécaniques transmissibles	Nombre d'inconnues de statique
Glissière		$\begin{array}{cc} Tx & - \\ Ty & - \\ - & Rz \end{array}$	$\left\{\begin{array}{cc} X & - \\ Y & - \\ - & N \end{array}\right\}_A$	2

Statique graphique

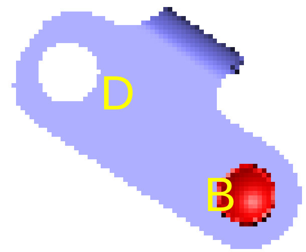
La statique graphique s'applique à des problèmes plans, sans moments.

Il est possible de résoudre des problèmes avec plusieurs forces, mais nous nous limiterons aux deux cas suivants :

- Solide soumis à **deux** forces
- Solide soumis à **trois** forces

Statique graphique

Exemple : Bielle (2) du système de bridage



Méthode Graphique

- Solide soumis à **deux** forces
- Solide soumis à **trois** forces

Isolement du système étudié

Bilan des actions extérieures

Nom de l'action	Point d'application	Direction et sens	Intensité
$B_{1\rightarrow 2}$	B	?	?
$D_{3\rightarrow 2}$	D	?	?

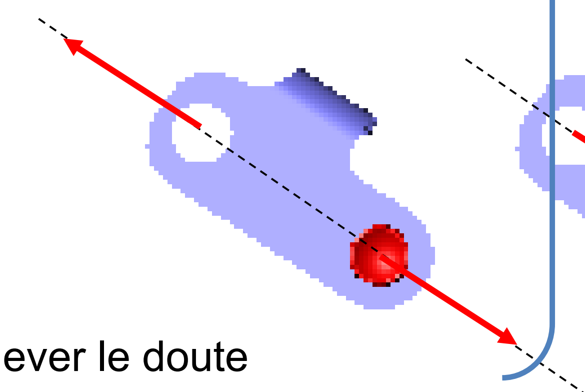
On constate que ce solide est soumis à deux forces parallèles au plan de l'étude

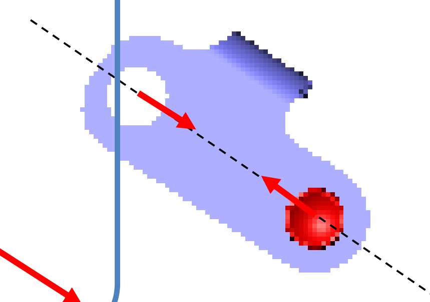
Résolution graphique du problème :

Lorsqu'un solide est soumis à deux forces, alors celles-ci ont même droite d'action, même norme, mais des sens opposés.

Tracer la droite d'action : elle passe par les points d'application des forces.

Il y a alors deux solutions possibles …





Cette méthode est à retenir

Seul, l'isolement d'un autre solide peut lever le doute

Statique graphique

Méthode Graphique

- Solide soumis à **deux** forces
- Solide soumis à **trois** forces

Isolement du système étudié

Bilan des actions extérieures

Nom de l'action	Point d'application	Direction et sens	Intensité
$C_{2\rightarrow 1}$	C	connue	connue
$B_{2\rightarrow 1}$	B	connue	?
$A_{0\rightarrow 1}$	A	?	?

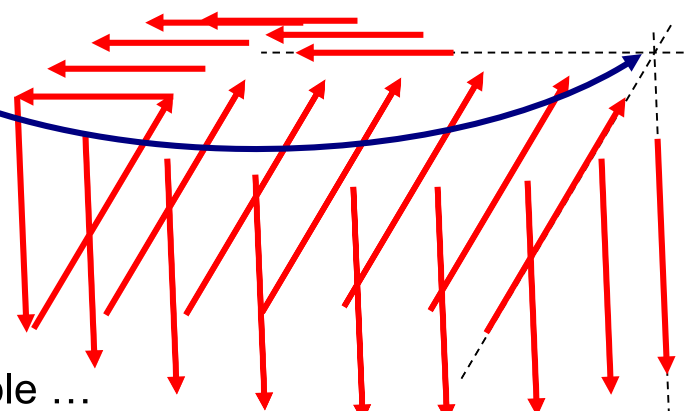
➔ ce solide est soumis à trois forces parallèles au plan de l'étude

Résolution graphique du problème

Lorsqu'un solide est soumis à trois forces, alors les directions de celles-ci sont concourantes, et la somme des trois forces est nulle.

Mises bout à bout, les trois forces forment un triangle.

Ce triangle s'appelle « LE DYNAMIQUE »



Voyons tout cela sur un exemple …

Cette méthode est à retenir

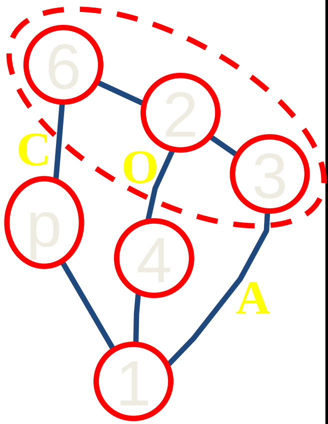
Statique graphique

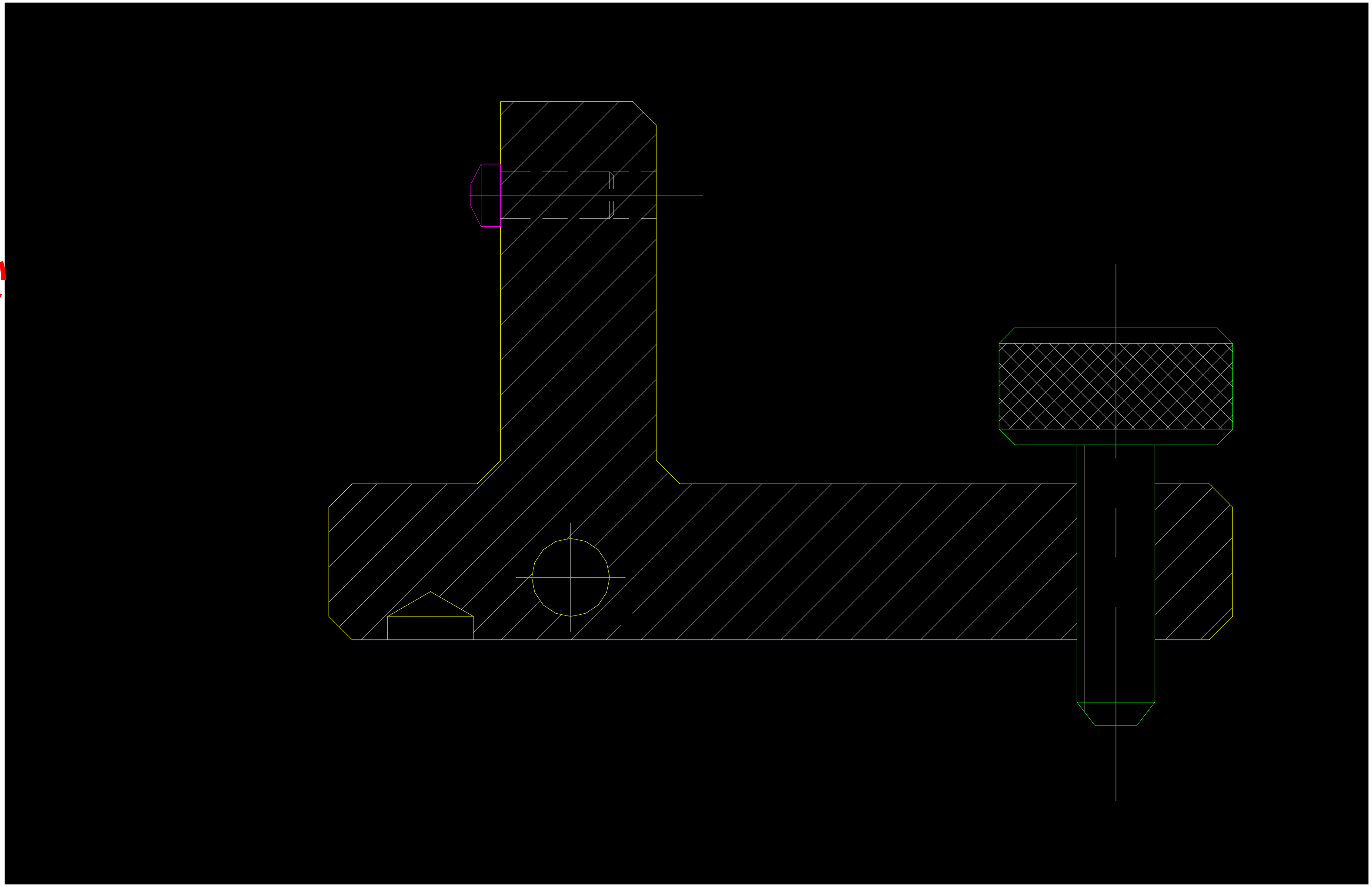
Méthode Graphique

- Solide soumis à **deux** forces
- Solide soumis à **trois** forces

Exemple : bride mécanique

Isolement du système étudié :





Méthode Graphique

- Solide soumis à **deux** forces
- Solide soumis à **trois** forces

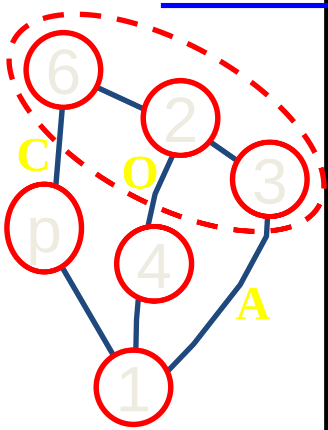
Statique graphique

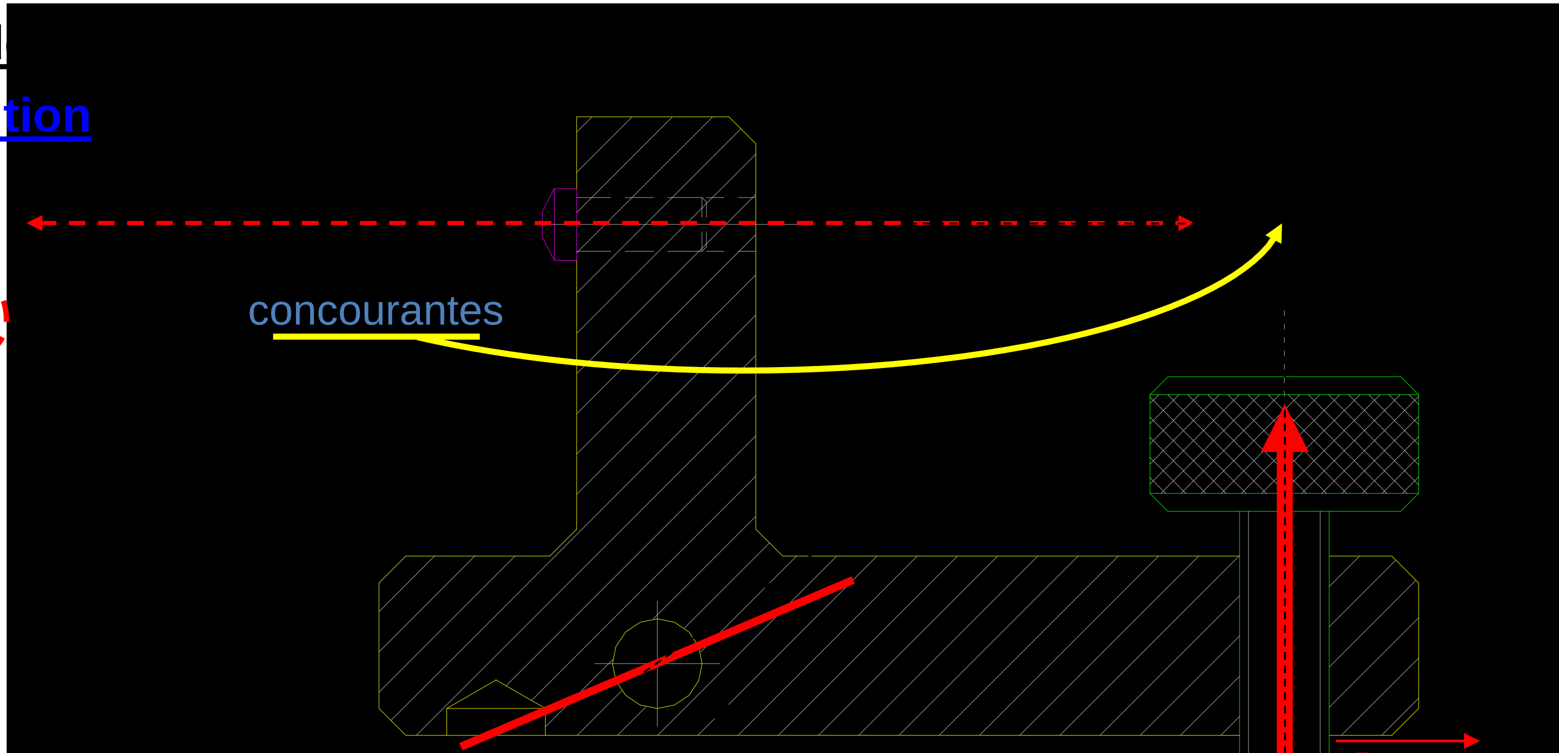
Exemple : bride mécanique

Isolement du système étudié : solide (2+3+6)

Bilan d

Résolution





Action	Point d'application	Direction et sens	Intensité
$A_{1\to3}$	A	perpendiculaire au contact	800 N
$C_{p\to6}$	C	Droite horizontale	?
$O_{1\to2}$	O	?	?

➔ ce solide est soumis à trois forces parallèles au plan de l'étude

Méthode Graphique

- Solide soumis à **deux** forces
- Solide soumis à **trois** forces

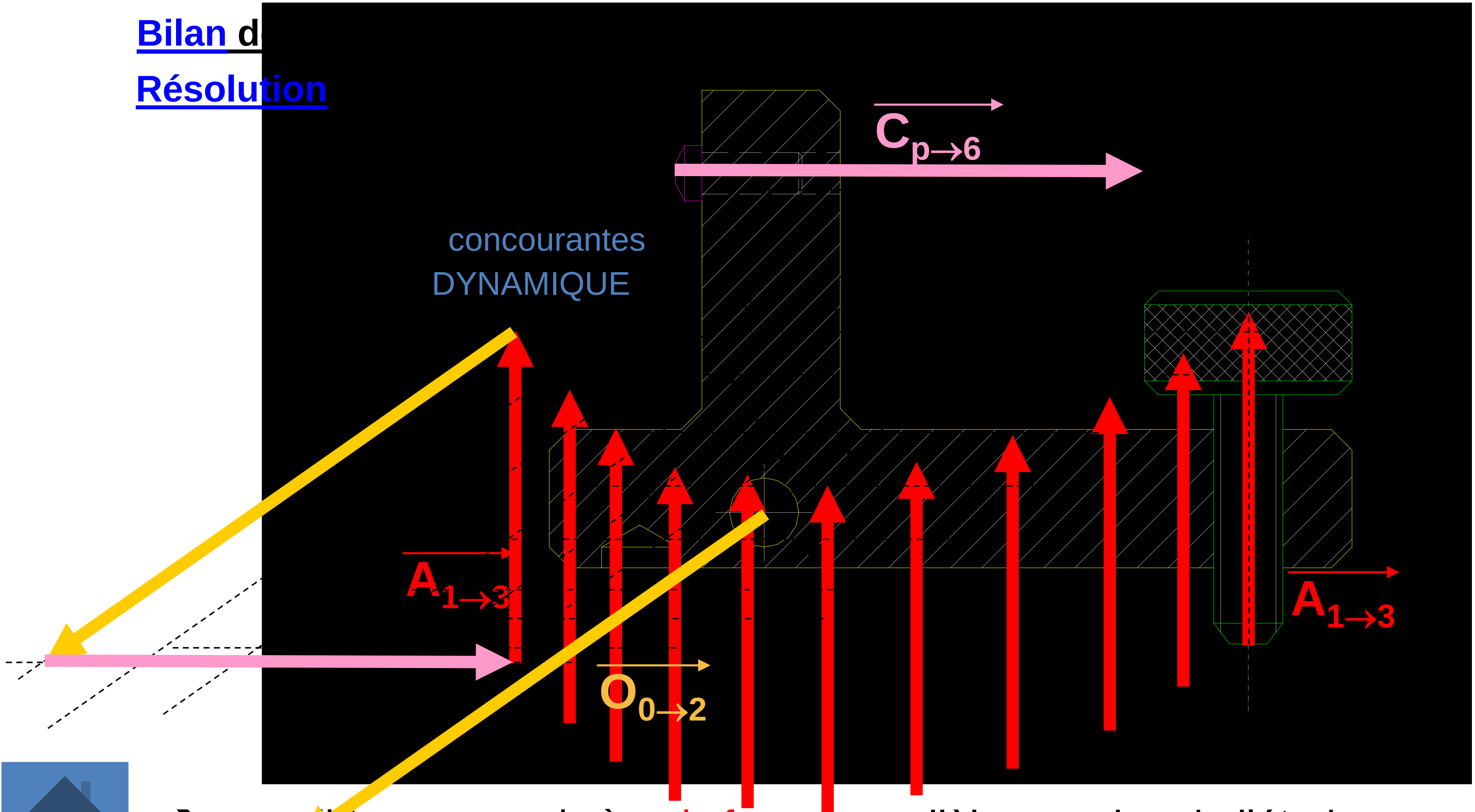
Statique graphique

Exemple : bride mécanique

Isolement du système étudié

Bilan d

Résolution



➔ ce solide est soumis à trois forces parallèles au plan de l'étude