Chapitre 9 bis

REPONSE INDICIELLE
DES SYSTÈMES LINÉAIRES

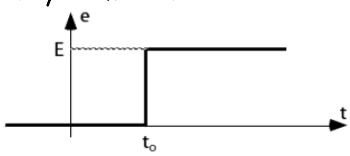
Dans le chapitre 9, nous avons étudié le comportement d'un système linéaire soumis à une tension sinusoïdale. On parle dans ce cas de réponse harmonique. Nous allons ici nous intéresser à la réponse indicielle de ces systèmes.

I. Réponse indicielle

La réponse indicielle est la réponse du système à un **échelon de tension** défini par :

- $e(t) = 0$ pour $t < t_0$
- $e(t) = E$ pour $t \geq t_0$

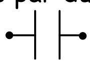
On prend généralement $t_0 = 0$



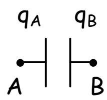
II. Réponse indicielle de systèmes linéaires du 1^er ordre

II.1 Le dipôle RC

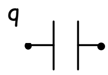
II.1.1 Rappels

Un condensateur est constitué de deux conducteurs nommés armatures, séparées par du vide ou un diélectrique (isolant tel que l'air). La représentation symbolique d'un condensateur est 

A chaque instant, les armatures portent des charges opposées : $q_A(t) = - q_B(t)$

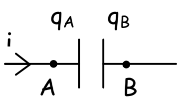


On appelle charge du condensateur, notée q, la valeur $q = |q_A(t)| = |q_B(t)|$. La charge q s'exprime en coulomb (C). Si $q_A(t) > 0$, alors $q = q_A(t)$ et l'on note

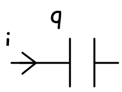


Lien entre la charge et l'intensité

Par convention, l'armature qui porte la charge q est celle par laquelle entre l'intensité du courant s'il circule dans le sens positif choisi.



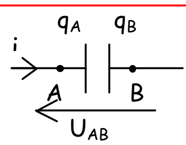
ce que l'on représente aussi par



L'intensité du courant électrique dans un conducteur est un débit de charges par unité de temps. Avec les conventions choisies sur le schéma, on a $i = \frac{dq}{dt}$

Lien entre la charge et la tension

En convention récepteur, la représentation symbolique d'un condensateur est



La charge du condensateur q_A et la tension à ses bornes u_{AB} sont liées à chaque instant par la relation

$q_A = C\, u_{AB}$ avec
- q_A charge du condensateur en coulomb (C)
- C capacité du condensateur en farad (F)
- u_{AB} la tension en volt (V)

Association de condensateurs

- Association en série

Des condensateurs associés en série se comportent comme un condensateur équivalent de capacité C_{eq} telle que :

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}$$

- Association en dérivation

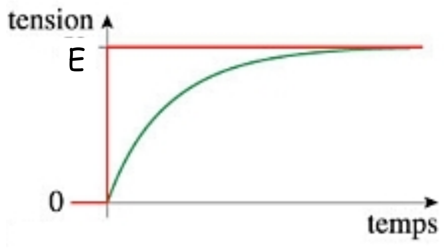
Des condensateurs associés en dérivation se comportent comme un condensateur équivalent de capacité C_{eq} telle que :

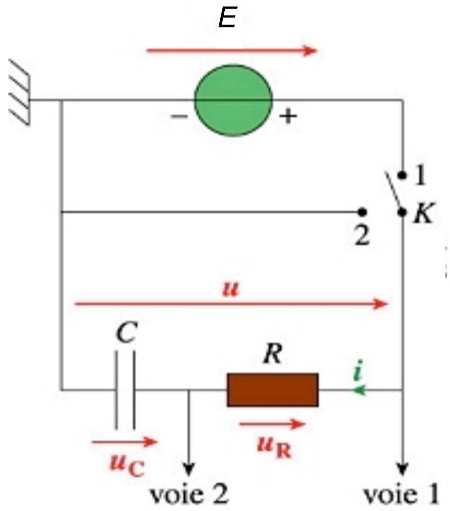
$$C_{eq} = \sum_{i=1}^{n} Ci$$

II.1.2 Charge d'un condensateur

On soumet un dipôle RC à un échelon de tension. Pour cela, on réalise le montage ci-dessous : lorsque K est sur la position 2, la tension appliquée au dipôle est nulle. Dès que l'on bascule l'interrupteur sur la position 1, le dipôle est soumis à la tension E.

Les tensions visualisées par les voies 1 (tension aux bornes du dipôle RC) et 2 (tension aux bornes du condensateur) sont représentées ci-dessous :





Le condensateur ne se charge pas instantanément : la tension à ses bornes passe de manière continue de 0 à E. C'est **le régime transitoire**.

Par la suite, la tension aux bornes du condensateur vaut (pratiquement) E et reste constante : c'est le **régime permanent**. Plus le produit RC est important, plus le régime transitoire est long.

Etude théorique

Etablissons l'équation différentielle vérifiée par la tension u_c aux bornes du condensateur pendant la charge. D'après la loi d'additivité des tensions, on a

E = ………… + ………… . D'après la loi d'ohm, on a ………… = …………… or i = ………… avec q = ……… d'où i = …………

on en déduit donc :………

$\boxed{\text{On note } \tau = RC. \quad \tau \text{ est la constante de temps du dipôle RC et s'exprime en seconde.}}$

Exercice : vérifier par analyse dimensionnelle que τ est homogène à un temps

……

……

……

……

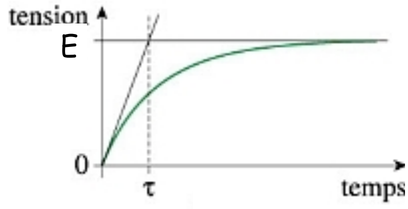
L'équation différentielle précédente s'écrit donc : ……………………………………………………………………

Vérifions que cette équation différentielle admet pour solution $u_C = E(1 - e^{-t/\tau})$

……

……

Détermination de τ



- Par le calcul : τ = RC
- Graphiquement : la tangente à la courbe à t = 0s coupe la droite d'équation u_C = E en un point dont l'abscisse est la constante de temps RC du circuit.

Pour t = τ, on a u_C = …………………… soit u_C = ………………

La constante de temps τ permet de déterminer l'ordre de grandeur de la durée de la charge du condensateur. Pour t = τ, la tension aux bornes du condensateur est égale à 63 % de sa valeur maximale. Pour **t = 5τ,** la tension aux bornes du condensateur est supérieure à 99 % de sa valeur maximale : on considère alors que le condensateur est complètement chargé et que **le régime permanent est atteint**.

Temps de montée

Le **temps de montée** est la durée que met le signal pour passer de 10% à 90% de sa valeur en régime établi (front montant).

Soient t_1 et t_2 les instants où la tension aux bornes du condensateur vaut respectivement 10% et 90 % de sa valeur finale :

$u_c(t_1)$ = …………………… = ……………………… d'où t_1 = …………………………

$u_c(t_2)$ = …………………… = ……………………… d'où t_2 = …………………………

On en déduit t_m = ……………… = ……………………

Intensité du courant dans le circuit

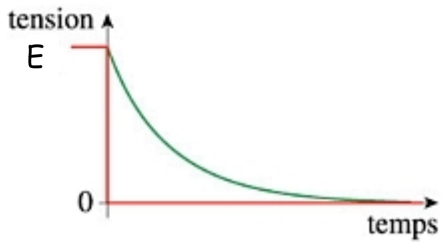
Comme $i = \frac{dq}{dt} = C$………… , on en déduit que i = ……………………

II.1.3 Décharge d'un condensateur

Une fois le condensateur chargé (la tension à ses bornes est alors ………), on bascule l'interrupteur sur la position 2. Le condensateur se décharge alors dans la résistance.

Le condensateur se décharge de manière continue et la valeur de la tension à ses bornes passe de E à 0.

Ici encore, plus le produit RC est important, plus le régime transitoire est long.



Etude théorique

Lorsque l'interrupteur est en position 2, la loi d'additivité des tensions donne :

……

……

……

……

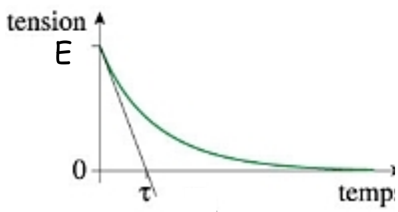
En prenant pour origine des temps (t =0s) le début de la décharge, la solution de cette équation est $u_C = E \cdot e^{-t/\tau}$.

Vérification :

……

……

Graphiquement, on peut déterminer τ de manière similaire à ce qui a été fait précédemment : la tangente à la courbe à t = 0s coupe la droite d'équation u_C = 0 V en un point dont l'abscisse est la constante de temps RC du circuit.



De plus, pour t = τ, u_C = …………………… soit u_C = ………………

Pour t = τ, la tension aux bornes du condensateur est égale à 37 % de sa valeur

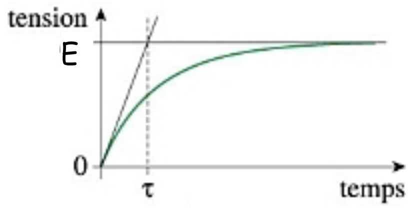
II.1.4 Energie emmagasinée dans un condensateur

L'énergie emmagasinée dans un condensateur est

$W_e = \frac{1}{2}Cu^2$ avec
- C capacité du condensateur en farad (F)
- u la tension aux bornes du condensateur en volt (V)
- W_e l'énergie emmagasinée par le condensateur en joule (J)

Comme q = Cu, soit u = ……… on a également ……………

L'énergie dans un condensateur ne pouvant pas subir de discontinuité (un transfert d'énergie ne pouvant en effet pas être instantané), on peut déduire de $W_e = \frac{1}{2}Cu^2$ que la tension u aux bornes d'un condensateur n'est jamais discontinue.



En conséquence, si un condensateur est initialement hors tension et déchargé (la tension à ses bornes est alors nulle), la tension à ses bornes à t = 0 s (instant du début de la charge) doit être égale à 0.

II.2 Le dipôle RL

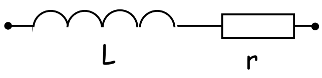
II.2.1 Rappels

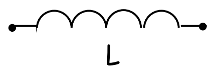
Une bobine est constituée par l'enroulement d'une grande longueur de fil conducteur. Un noyau de fer doux peut-être placé au centre de l'enroulement pour améliorer les propriétés de celle-ci.

La représentation symbolique d'une bobine est  .

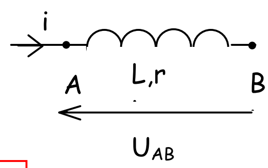
Le terme L représente l'**inductance** de la bobine qui s'exprime en **henry (H)**. L'inductance d'une bobine caractérise sa propriété à s'opposer aux variations de l'intensité.

Le terme r représente la résistance de la bobine qui s'exprime en ohm (Ω)

Remarques : - On trouve également la représentation suivante 

- Pour une bobine parfaite (dont la résistance est négligeable), on utilise la représentation 

Tension aux bornes d'une bobine

En convention récepteur, la représentation symbolique d'une bobine est 

La tension aux bornes de la bobine et l'intensité qui la traverse sont alors liées par la relation :

$U_{AB} = L\frac{di}{dt} + ri$ avec L l'inductance de la bobine en henry (H)

r sa résistance en ohm (Ω)

- en courant **continu**, la tension aux bornes de la bobine est $U_{AB} = ri$

Association de bobines

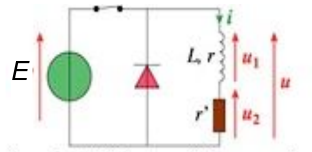
➢ Association en série

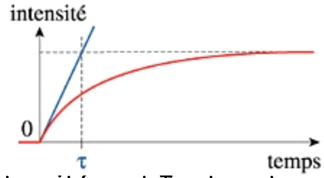
Des bobines associées en série se comportent comme une bobine équivalente d'inductance L_{eq} =

➢ Association en dérivation

Des bobines associées en dérivation se comportent comme une bobine équivalente d'inductance L_{eq} telle que :

II.2.2 Réponse d'un dipôle RL à un échelon de tension





On nomme dipôle RL l'association série d'une résistance et d'une bobine. On soumet ce dipôle à un échelon de tension. Pour cela, on réalise le montage ci-contre :

A t = 0 s, on ferme l'interrupteur. La courbe représentant l'évolution de l'intensité i est représentée ci-contre.

Le courant ne s'établit pas instantanément dans le circuit, car la bobine s'y oppose. La valeur de l'intensité croît de manière continue, passant progressivement de la valeur initiale nulle à sa valeur maximale. C'est **le régime transitoire**. Par la suite, l'intensité vaut I_0 et reste constante: c'est le **régime permanent**.

Le régime transitoire est d'autant plus long que L est important et que R est faible.

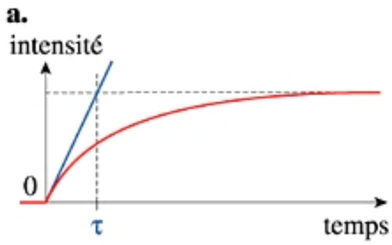
Etude théorique

Etablissons l'équation différentielle vérifiée par l'intensité au moment de la fermeture de l'interrupteur.
D'après la loi d'additivité des tensions, on a E = ……….. + ……….. . soit E = ……………………………………………………. Posons R = r + r' résistance du dipôle RL
on en déduit donc : ………

On note $\tau = \frac{L}{R}$. τ est la constante de temps du dipôle RL et s'exprime en seconde.

L'équation différentielle précédente s'écrit donc : …………………………………………………………………………………………………
Résoudre cette équation différentielle (on notera I_0 l'intensité du courant en régime permanent)
………
………

Détermination de τ



- Par le calcul : $\tau = \frac{L}{R}$
- Graphiquement : la tangente à la courbe à t = 0 s coupe la droite d'équation $i = I_0$ en un point dont l'abscisse est la constante de temps $\tau = \frac{L}{R}$ du circuit.

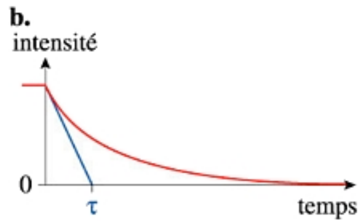
Pour t = τ, on a i = …………………. soit i = ……………..

La constante de temps τ permet de déterminer l'ordre de grandeur de la durée de l'établissement du courant dans le circuit (régime transitoire). Pour t = τ, l'intensité atteint environ 63 % de sa valeur maximale. Pour t = 5τ, l'intensité est supérieure à 99 % de sa valeur maximale (le régime permanent est alors atteint).

Tension aux bornes de la bobine

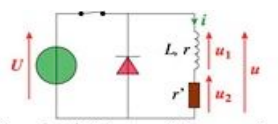
Comme u = ……………………………………………., on en déduit que u = ……………………………………………………….

II.2.3 Rupture du courant

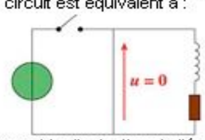


Une fois le régime permanent atteint, on ouvre l'interrupteur dans le montage précédent (haut de page).

La valeur de l'intensité passe de I_0 à 0 de manière continue. Le courant ne s'annule pas instantanément car la bobine s'oppose à la disparition du courant.



Lors de l'établissement du courant, aucun courant ne passe dans la diode, tout se passe comme si elle n'était pas là.
À l'ouverture du circuit, elle évite une étincelle de rupture au niveau de l'interrupteur. Elle se comporte, si sa tension de seuil est faible, comme un interrupteur fermé.
Le circuit est équivalent à :



Il permet la dissipation de l'énergie emmagasinée dans la bobine.

Le régime transitoire est d'autant plus long que L est important et que R est faible.

Etude théorique

Lorsque l'interrupteur est ouvert, la loi d'additivité des tensions donne :

………

………

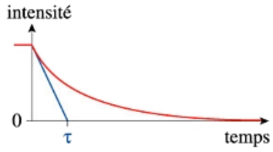
Si l'on pose t = 0s la date à laquelle on ouvre le circuit, la solution de cette équation est $i = A.e^{-t/}$

Vérification :

………

………

Quelle est la valeur de A ?………………………………………………………………………………………………



Graphiquement, on peut déterminer τ de manière similaire à ce qui a été fait précédemment. Pour t = τ, l'intensité ne vaut plus que 37 % de sa valeur initiale et pour t = 5τ, l'intensité est pratiquement nulle.

II.2.4 Energie emmagasinée dans une bobine

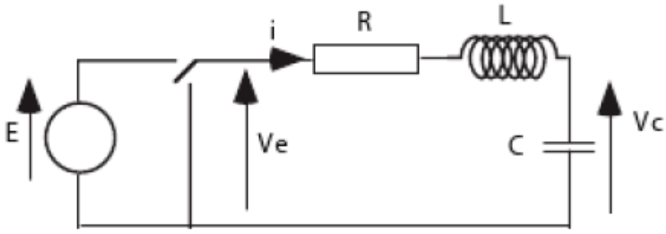
L'énergie emmagasinée dans une bobine est

$$E_m = \frac{1}{2}Li^2$$ avec

- L inductance de la bobine en henry (H)
- i l'intensité du courant en ampère (A)
- E_m l'énergie emmagasinée par la bobine en joule (J)

L'énergie dans une bobine ne pouvant pas subir de discontinuité (un transfert d'énergie ne pouvant en effet pas être instantané), on peut déduire de $E_m = \frac{1}{2}Li^2$ que l'intensité dans une bobine n'est jamais discontinue. En conséquence, si une bobine est dans un circuit initialement ouvert (l'intensité qui la traverse est alors nulle), l'intensité qui la traverse à t = 0 s (instant de la fermeture du circuit) doit être égale à 0.

II. Réponse indicielle de systèmes linéaires du 2ème ordre



Le circuit RLC série, alimenté par une source de tension $u_e(t)$ conduit à l'écriture de l'équation différentielle vérifiée par $u_c(t)$:

………

………

………

………

Si $u_e(t)$ est un échelon de tension E, appliqué à t = 0, l'équation devient :

………

………

C'est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. La solution est la somme de la solution générale de l'équation sans second membre et d'une solution particulière de l'équation avec second membre.

La solution de l'équation sans second membre, c'est-à-dire avec $u_e(t) = 0$, correspond au **régime transitoire**. Ceci revient à analyser le comportement du circuit RLC lorsqu'il est mis en court-circuit sur lui-même. Ce comportement est dit régime propre (ou régime libre) du circuit RLC.

La solution particulière correspond au **régime permanent**.