Chapitre 6

LES REGIMES SINUSOIDAUX

Dans ce chapitre, nous nous placerons en régime sinusoïdal forcé. Les sources de tension et de courant délivrent donc des tensions et des intensités sinusoïdales. **Les expressions des tensions et intensités obtenues aux bornes des dipôles correspondent au régime établi, c'est-à-dire après le régime transitoire.**

I. Grandeur sinusoïdale

Rappels : la figure 1 ci-contre représente l'évolution temporelle d'une grandeur sinusoïdale. Une telle grandeur est représentée par la fonction mathématique :

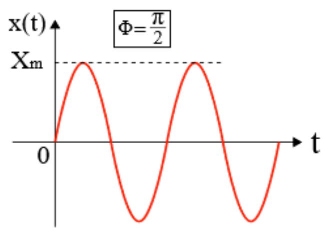


Figure 1 - Signal sinusoïdal

$$x(t) = X_m \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \phi_0\right)$$ avec

X_m l'amplitude du signal

T la période du signal (s)

φ_0 la phase à l'origine des dates (rad)

Nous avons également vu que, pour un **signal sinusoïdal**, $X_m = X_{eff}\sqrt{2}$. On peut donc écrire

$$x(t) = X_{eff}\sqrt{2}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \phi_0\right)$$

II. Représentation complexe d'une grandeur sinusoïdale

II.1 Ecriture complexe

A la grandeur sinusoïdale $x(t) = X_m \cos(\omega t + \phi)$ est associée la grandeur complexe : $\underline{x(t)} = X_m e^{j(\omega t + \phi)}$.

On peut donc écrire $\underline{x(t)} = X_m e^{j\omega t} e^{j\phi} = \underline{X_m} e^{j\omega t}$ où $\underline{X_m} = X_m e^{j\phi}$ représente l'amplitude complexe du signal.

On peut également écrire $\underline{x(t)} = X_{eff}\sqrt{2} e^{j\omega t} e^{j\phi} = \underline{X_{eff}}\sqrt{2} e^{j\omega t}$ où $\underline{X_{eff}} = X_{eff} e^{j\phi}$ représente la valeur efficace complexe du signal. $\underline{X_{eff}}$ est également appelé phaseur du signal.

Remarque: j est le complexe tel que $j^2 = -1$ (souvent noté i en mathématiques).

Pour revenir à la grandeur sinusoïdale réelle, il suffit d'appliquer :

$x(t) = \mathrm{Re}(\underline{x(t)})$ $\quad X_m = |\underline{x(t)}|$ et $\quad \Phi = \arg \underline{X_m}$

II.2 Diagramme de Fresnel

Pour représenter x(t), on utilise la représentation de Fresnel : x(t) est alors, dans le plan complexe, un vecteur de norme X_m et dont l'argument est $\omega t + \Phi$

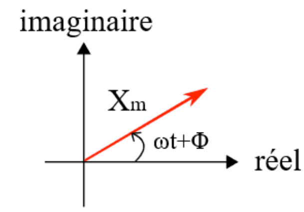


Figure 5 - Représentation de Fresnel d'un signal sinusoïdal

Remarques : - on peut également prendre pour norme du vecteur X_{eff}
- la représentation de Fresnel n'est utilisable que pour des grandeurs de même pulsation.

L'utilisation du diagramme de Fresnel est très pratique pour sommer des tensions sinusoïdales (lois des mailles) ou des courants sinusoïdaux (lois des nœuds), ainsi que pour touver le déphasage entre certaines grandeurs. (cf exercices)

II.3 Dérivation et intégration de grandeurs complexes

Dérivation par rapport au temps :

$$\frac{d\underline{x}(t)}{dt} = \left(X_m e^{j(\omega t+\phi)}\right)' = j\omega X_m e^{j(\omega t+\phi)} = j\omega \underline{x}(t)$$

$$\boxed{\frac{d\underline{x}(t)}{dt} = j\omega \underline{x}(t)}$$

La dérivée de la forme complexe d'un signal sinusoïdal s'obtient donc en multipliant celui-ci par jω. Si l'on dérive 2 fois, il faut multiplier par $(j\omega)^2 = -\omega^2$, etc…

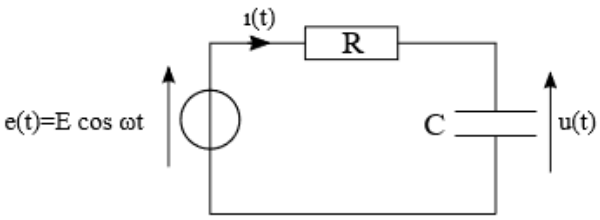
Intégration par rapport au temps :

$$\boxed{\int \underline{x}(t) = \frac{1}{j\omega}\underline{x}(t)}$$

L'intégration de la forme complexe d'un signal sinusoïdal s'obtient donc en divisant celui-ci par jω.

II.4 Intérêt de la notation complexe : étude du dipôle RC en régime sinusoïdal forcé

On parle de régime forcé lorsque l'on impose à un circuit une tension sinusoïdale délivrée par un générateur. Après un régime transitoire, le circuit évolue de la même manière que le générateur, notamment à **une fréquence identique à celui-ci**.



Dans le circuit ci-contre, la tension u(t) et l'intensité i(t) sont des grandeurs sinusoïdales de **même pulsation ω** que celle **imposée** par le générateur.

Dans le circuit ci-dessus, appliquer la loi des mailles pour déterminer l'équation différentielle vérifiée par u(t). Passez en complexes pour déterminer $\underline{u}(t)$ puis en déduire l'expression de u(t).

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

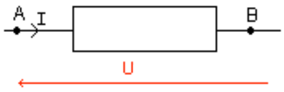
………

La solution obtenue ici correspond à la solution du régime établi, c'est-à-dire une fois que le régime transitoire est terminé.

III. Impédances et admittances complexes

III.1 Définitions

Soit un dipôle orienté en convention récepteur.



En régime sinusoïdal forcé, u(t) et i(t) sont des grandeurs sinusoïdales. On note $\underline{u}(t)$ et $\underline{i}(t)$ les grandeurs complexes associées, l'**impédance complexe** du dipôle est définie par :

$$\boxed{\underline{Z} = \frac{\underline{u}(t)}{\underline{i}(t)}}$$

Remarque : l'impédance est également définie par $\boxed{\underline{Z} = \frac{\underline{U}_{eff}}{\underline{I}_{eff}}}$

On pourra également définir la grandeur inverse, qui sera appelée l'admittance complexe : $\boxed{\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}}$

III.2 Impédances complexes de dipôles linéaires usuels

D'après la définition de l'impédance complexe, on peut écrire que $\underline{u} = \underline{Z}\,\underline{i}$ (ce qui correspond à la généralisation de la loi d'Ohm en régime sinusoïdal).

Déterminons l'impédance de dipôles linéaires usuels.

- ***La résistance***

Pour une résistance, u(t) = Ri(t). En régime sinusoïdal forcé, en passant en complexes, on obtient : $\underline{u}(t) = R\underline{i}(t)$. On en déduit donc que $\boxed{\underline{Z}_R = R}$

En notant $\varphi_R = \varphi_u - \varphi_i$ le déphasage entre la tension aux bornes de la résistance et l'intensité du courant qui la traverse, on a $\varphi_R = 0$ (la tension et le courant sont en phase). En effet,

- ***La bobine parfaite***

Pour une bobine parfaite, $u = L\frac{di}{dt}$. On en déduit donc que $\underline{u} = jL\omega\,\underline{i}$ d'où $\boxed{\underline{Z}_L = jL\omega}$. Aux bornes de la bobine, $\varphi_L = \pi / 2$: la tension est en avance de π / 2 sur le courant. En effet,

- ***Le condensateur***

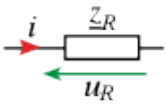
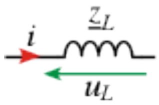
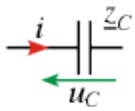
Pour un condensateur, $i = C\frac{du}{dt}$ ce qui donne $\underline{i} = jC\omega\,\underline{u}$ d'où $\underline{u} = \frac{1}{jC\omega}\underline{i}$. On en déduit donc que $\boxed{\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}}$ ce qui peut également s'écrire $\underline{Z}_C = -\frac{j}{C\omega}$. Aux bornes du condensateur, $\varphi_C = -\pi / 2$: la tension est en retard de π / 2 sur le courant. En effet,

III.3 Impédance d'un dipôle

L'impédance Z d'un dipôle correspond au module de l'impédance complexe de ce dipôle. On a donc

$$\boxed{Z = \frac{U}{I} = \frac{U_{eff}}{I_{eff}}}$$

En résumé :

	Résistance	Inductance	Capacité
			
Impédance (Ω)	$Z_R = R$	$Z_L = L\omega$	$Z_C = \dfrac{1}{C\omega}$
Déphasage (rad)	$\varphi_R = 0$	$\varphi_L = +\dfrac{\pi}{2}$	$\varphi_C = -\dfrac{\pi}{2}$
Impédance complexe (Ω)	$\underline{Z}_R = R$ *réel pur*	$\underline{Z}_L = jL\omega$ *imaginaire pur*	$\underline{Z}_C = -j\dfrac{1}{C\omega}$ *imaginaire pur*
Admittance complexe (Siemens - S)	$\underline{y}_R = \dfrac{1}{R}$ *réel pur*	$\underline{y}_L = -j\dfrac{1}{L\omega}$ *imaginaire pur*	$\underline{y}_C = jC\omega$ *imaginaire pur*

III.4 Comportement de ces dipôles linéaires en basse et haute fréquence

L'impédance complexe d'une résistance Z_R = R ne dépend pas de la pulsation ω, donc de la fréquence. Le comportement d'une résistance est donc indépendant de la fréquence de la tension à laquelle elle est soumise.

Pour une bobine, $\underline{Z}_L = jL\omega$. Ainsi, lorsque $\omega \to 0$ alors $\underline{Z}_L \to 0$: la bobine se comporte donc comme un **interrupteur fermé** aux **basses fréquences**. Lorsque $\omega \to \infty$ alors $\underline{Z}_L \to \infty$: la bobine se comporte donc comme un **interrupteur ouvert** aux **hautes fréquences**.

Pour un condensateur, $\underline{Z}_C = \dfrac{1}{jC\omega}$. Ainsi, lorsque $\omega \to 0$ alors $\underline{Z}_C \to \infty$: le condensateur se comporte donc comme un **interrupteur ouvert** aux **basses fréquences**. Lorsque $\omega \to \infty$ alors $\underline{Z}_c \to 0$: le condensateur se comporte donc comme un **interrupteur fermé** aux **hautes fréquences**.

III.4 Associations d'impédances

Association **en série** d'impédances : soit $\underline{Z}_1$ et $\underline{Z}_2$ deux impédances placées en série, alors $\underline{Zeq}$ l'impédance équivalente vérifie :

$$\boxed{\underline{Zeq} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$$

Association **en parallèle** d'impédances : soit $\underline{Z}_1$ et $\underline{Z}_2$ deux impédances placées en parallèle, alors $\underline{Zeq}$ l'impédance équivalente vérifie :

$$\frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2}$$

IV. Puissance

IV.1 Puissance instantanée

La puissance instantanée reçue par un dipôle à un instant t est définie par $\boxed{p(t)=u(t) \times i(t)}$. Si $u(t)=U_m \cos(\omega t+\phi)$ et $i(t)=I_m \cos(\omega t+\phi')$, alors : $p(t) = U_m \cos(\omega t+\phi) \times I_m \cos(\omega t+\phi')$

Or $\cos a \times \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$

donc : $p(t)= \frac{1}{2} U_m I_m (\cos(2\omega t+\phi+\phi')+\cos(\phi-\phi'))$

La puissance instantanée oscille deux fois plus vite que la tension et l'intensité (pulsation 2ω).

IV.2 Puissance moyenne

On calcule la puissance moyenne par : $P = \frac{1}{T'}\int_0^{T'} p(t)dt$

où **T' représente la période de la puissance** (attention, cela correspond à une demi-période de la tension ou de l'intensité).

On a donc :

$$\boxed{P = \tfrac{1}{2}U_m I_m \cos\Delta\phi = U_{eff} I_{eff} \cos\Delta\phi}$$

Le terme **cos $\Delta\phi$** est appelé **facteur de puissance**.

La présence du déphasage entre la tension et l'intensité dans l'expression de la puissance moyenne implique que celle-ci est nulle lorsque le déphasage est égale à $\pm\pi/2$. Ainsi, **dans le cas d'un condensateur ou d'une bobine, la puissance moyenne reçue est nulle.**

Remarque : la puissance moyenne reçue par un dipôle d'impédance complexe $\underline{Z}$ peut également s'écrire $P = Re(\underline{Z})I_{eff}^{\ 2}$ ou $P = Re(\underline{U_{eff}}\ \underline{I_{eff}}^*)$

V. Etude des circuits en régime sinusoïdal forcé

En régime sinusoïdal forcé, dans un réseau linéaire, toutes les grandeurs sont sinusoïdales. On peut remplacer chaque dipôle passif par son impédance complexe et les sources (de courant ou de tension) par les grandeurs complexes associées.

Ainsi, les lois de Kirchhoff (lois des nœuds, loi des mailles) restent valables à condition de les exprimer à l'aide des grandeurs complexes associées :

Il en est de même pour le diviseur de tension, de courant, et les théorèmes généraux (superposition, Millman, Thévenin, Norton, …)

Les problèmes sont donc identiques à ceux étudiés en régime continu. La différence réside dans le fait que les grandeurs recherchées sont des grandeurs complexes (grandeurs caractérisées par un module (qui correspond à l'amplitude) et par un argument (qui correspond à la phase)).