Chapitre 5

ANALYSE SPECTRALE

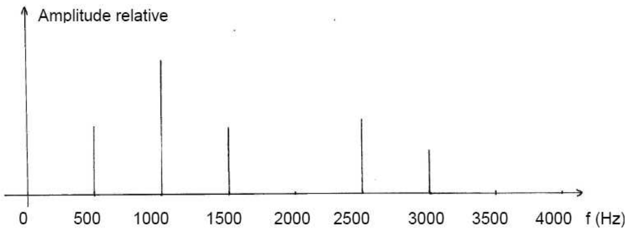
I. Représentation spectrale d'un signal

I.1 Intérêt de la représentation spectrale

Nous avons vu dans le chapitre 4 la représentation temporelle d'un signal (représentation de l'évolution de la grandeur étudiée en fonction du temps). Cependant, pour des signaux complexes, cette représentation devient vite inexploitable. On lui préfère alors la représentation spectrale.

I.2 Représentation spectrale (ou fréquentielle)

Dans la représentation spectrale, on représente l'amplitude du signal en fonction de la fréquence du signal.

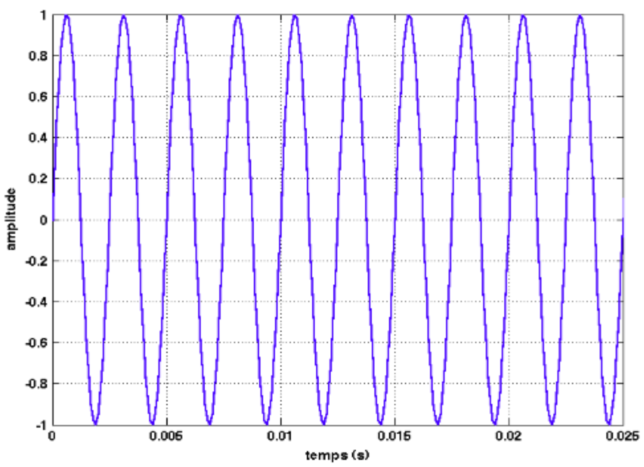


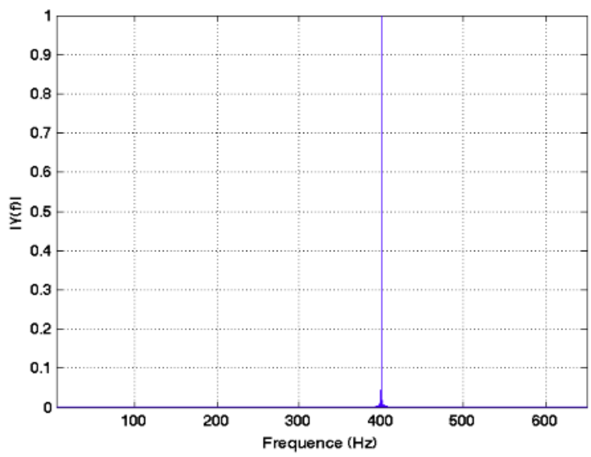
Cette représentation est appelée spectre en amplitude.

Remarque : il existe également le spectre de phase (spectre qui donne les phases initiales en fonction de la fréquence). Ces spectres seront abordés ultérieurement.

I.3 Spectres de signaux remarquables

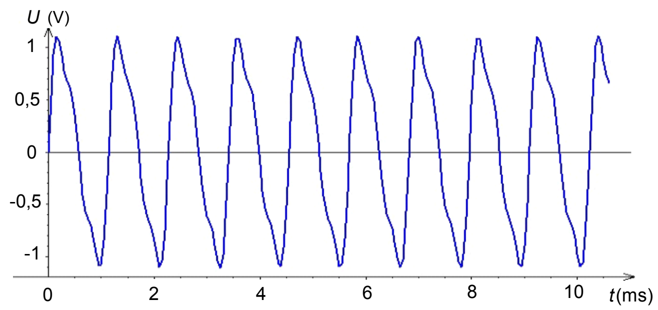
✓ **Le spectre d'un signal sinusoïdal alternatif** ne comporte qu'un seul pic.

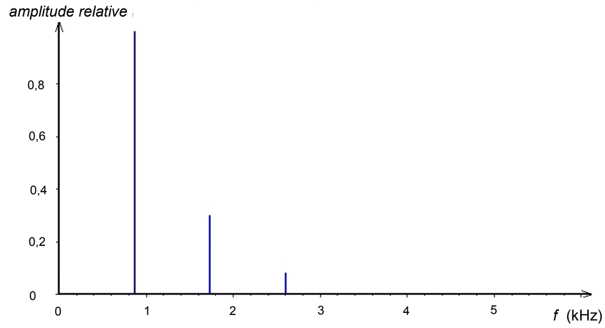




La fréquence du pic (400 Hz sur l'exemple) correspond à la fréquence du signal sinusoïdal et son amplitude correspond à celle du signal sinusoïdal.

✓ **Le spectre d'un signal périodique quelconque** comporte plusieurs pics.

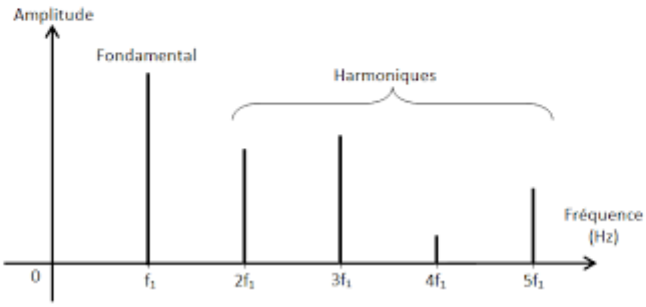




Le pic de **plus basse fréquence** (non nulle) est appelé fondamental. Sa fréquence correspond à la fréquence du signal périodique.

Les autres pics sont appelés harmoniques. Les fréquences des harmoniques sont obligatoirement multiples de la fréquence fondamentale.

Ainsi, $\mathbf{f_k = k \times f}$ avec f fréquence du fondamental, k nombre entier naturel strictement positif et f_k fréquence de l'harmonique de rang k.



Remarques : - l'harmonique de rang 1 correspond au fondamental

- il n'est pas obligatoire de trouver tous les harmoniques dans le spectre du signal. Certains peuvent manquer. Cela dépend du signal étudié.

✓ **Le spectre d'un signal continu comporte un seul pic à la fréquence 0**. L'amplitude du pic correspond à l'amplitude du signal.

On retiendra que sur un spectre, **un pic à la fréquence nulle correspond à la composante continue du signal**.

II. Analyse de Fourier

II.1 Théorie de Fourier

Tout signal périodique de période T, de fréquence $f = 1/T$, de pulsation $\omega = 2\pi f$, peut s'exprimer sous la forme d'une somme de signaux sinusoïdaux de fréquences multiples de f appelée **série de Fourier** :

$$s(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos(2\pi k f t + \varphi_k)$$

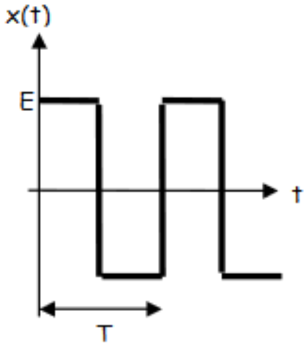
Des formules mathématiques permettent de calculer les valeurs des A_k et des φ_k, connaissant l'expression de la fonction $s(t)$.

- A_0 correspond à la **valeur moyenne du signal**.
  En effet : $< s(t) >= A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k < \cos(2\pi k f t + \varphi_k) >= A_0$ *car la valeur moyenne d'un cosinus est nulle.*
- le terme $A_1 \cos(2\pi f t + \varphi_1)$ correspondant à $k = 1$ et donc de même fréquence que le signal, est appelé **fondamental**.
- le terme $A_k \cos(2\pi k f t + \varphi_k)$ de fréquence f_k multiple de la fréquence du fondamental ($f_k = kf$) est appelé **harmonique de rang** k.

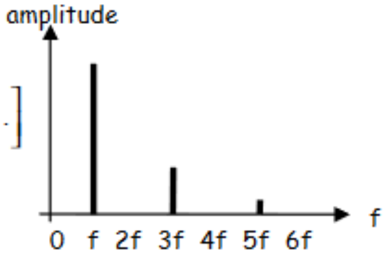
http://pcsi1.physique.pagesperso-orange.fr/signal.pdf

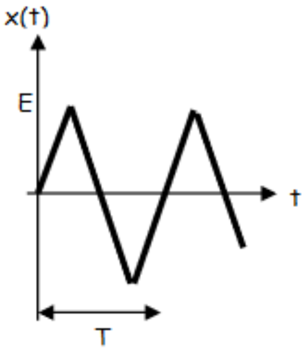
Ainsi, dans le spectre d'un signal périodique quelconque, chaque pic correspond à un signal sinusoïdal qui compose le signal périodique.

II.2 Etude de quelques exemples

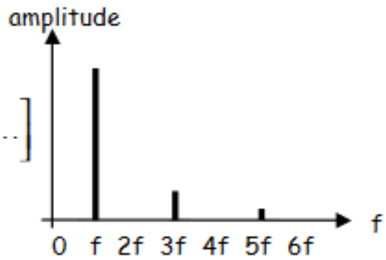


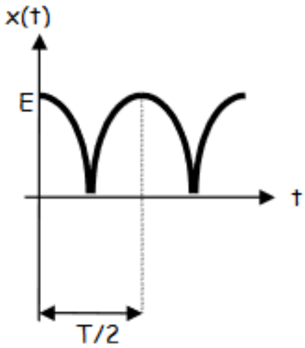
$$x(t) = \frac{4E}{\pi}\left[\sin(\omega t) + \frac{\sin(3\omega t)}{3} + \frac{\sin(5\omega t)}{5} + \ldots\right]$$



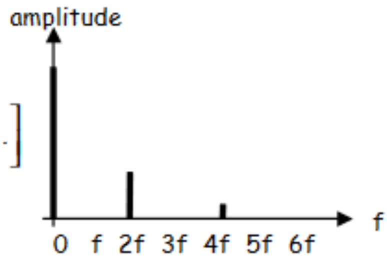


$$x(t) = \frac{8E}{\pi^2}\left[\sin(\omega t) - \frac{\sin(3\omega t)}{3^2} + \frac{\sin(5\omega t)}{5^2} - \ldots\right]$$





$$x(t) = \frac{2E}{\pi}\left[1 + \frac{2\cos(2\omega t)}{3} - \frac{2\cos(4\omega t)}{15} + \ldots\right]$$



DOCUMENTS :

Document 1 L'analyse spectrale

La première façon de représentation du signal vibratoire délivré par un capteur, est la représentation en fonction du temps (représentation **temporelle**). Cette représentation est utilisée pour suivre le comportement vibratoire d'une machine en fonction de ces paramètres de fonctionnement (étude de la vibration d'une turbine lors de sa décélération). Ce type de représentation, aisé à exploiter lorsque le signal est simple (vibration sinusoïdale induite par un balourd) [figure 4.1], devient vite inexploitable lorsque le signal a pour origine des sollicitations multiples [figure 4.2].

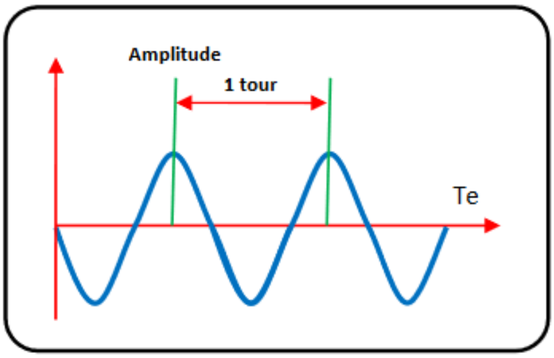


Figure 4.1 : Signal vibratoire sinusoïdal généré par un balourd

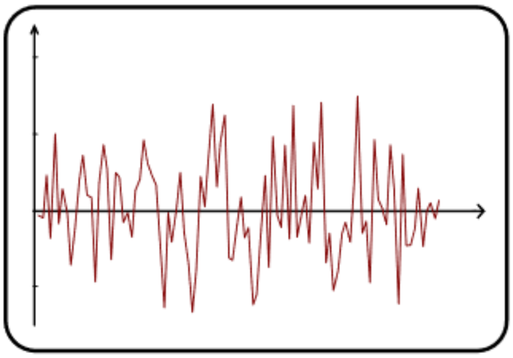
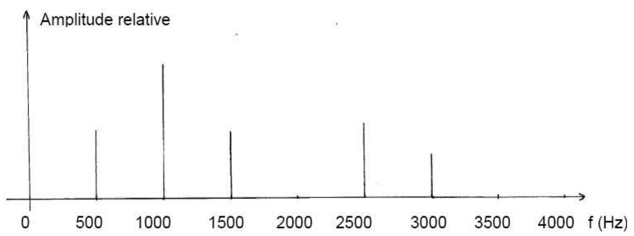
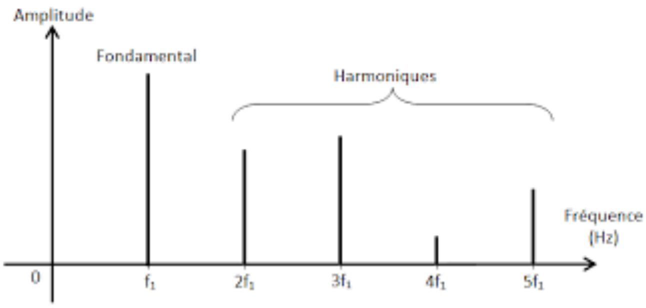


Figure 4.2 : Signal vibratoire complexe

http://www.silanus.fr/sin/formationSTI2D/ET22A-B/ET22A/Ressources/analyse-spectrale.pdf

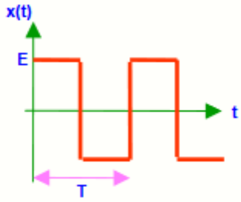
Document 2 Représentation de spectres



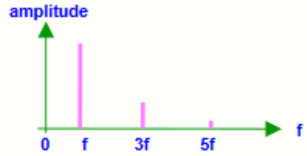


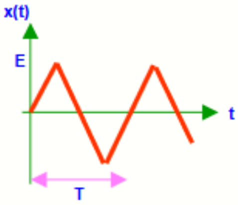
Document 3 Analyse de Fourier

<u>Document 4</u> <u>Quelques spectres de signaux usuels</u>

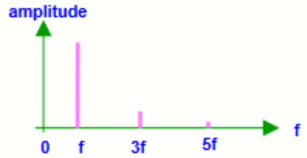


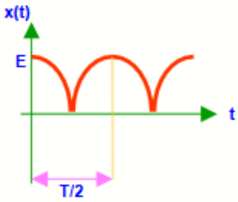
$$x(t) = \frac{4E}{\pi}\left[\sin(\omega t) + \frac{\sin(3\omega t)}{3} + \frac{\sin(5\omega t)}{5} + \dots\right]$$



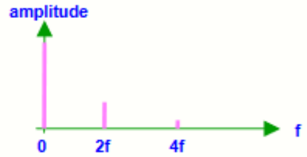


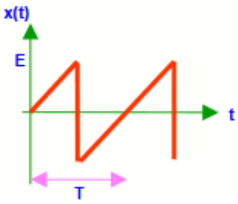
$$x(t) = \frac{8E}{\pi^2}\left[\sin(\omega t) - \frac{\sin(3\omega t)}{3^2} + \frac{\sin(5\omega t)}{5^2} - \dots\right]$$



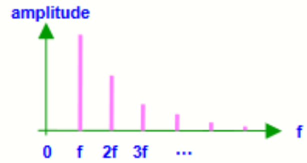


$$x(t) = \frac{2E}{\pi}\left[1 + \frac{2\cos(2\omega t)}{3} - \frac{2\cos(4\omega t)}{15} + \dots\right]$$





$$x(t) = \frac{2E}{\pi}\left[\sin(\omega t) - \frac{\sin(2\omega t)}{2} + \frac{\sin(3\omega t)}{3} + \dots\right]$$



https://www.robertponge.com/telechargements/ebooks/spectre-2.pdf