Sommaire

Vous trouverez les corrections à l'adresse suivante : `https://www.apmep.fr/Concours-d-entree-ENAC`

1 Extrait de l'épreuve optionnelle de TSA et TSEEAC 2020

Questions liées : 1 à 7

Notations

Les lettres $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{C}$ désignent respectivement les ensembles des réels, des entiers naturels, des entiers relatifs et des nombres complexes.

Le nombre i désigne le nombre complexe défini par $\mathrm{i}^2 = -1$.

textbfPartie I

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-2\ ;\ 2]$ par :

$$f(x) = \sqrt{1 - 0,25x^2}.$$

et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Question 1

Un calcul de $f(-x)$ donne

A. $f(-x) = f(x)$: la fonction f est impaire.

B. $f(-x) = -f(x)$: la fonction f est paire.

C. Le point $\mathrm{O}(0\,;\,0)$ est centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

D. La droite d'équation $x = 0$ est axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

Question 2

Le calcul de la dérivée f' de la fonction f donne :

A. $f'(x) = -0,5x\sqrt{1 - 0,25x^2}$, $x \in [-2\ ;\ 2]$

B. $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1 - 0,25x^2}}$, $x \in [-2\ ;\ 2]$

C. $f'(x) = -\dfrac{0,25x}{2\sqrt{1 - 0,25x^2}}$, $x \in [-2\ ;\ 2]$

D. $f'(x) = \dfrac{0,25x}{2\sqrt{1 - 0,25x^2}}$, $x \in [-2\ ;\ 2]$

Question 3

Ainsi, on en déduit :

A. La fonction f est croissante sur $]-2\ ;\ 0[$ et décroissante sur $]0\,;\,2[$.

B. La fonction f est décroissante sur $]-2\ ;\ 0[$ et croissante sur $]0\,;\,2[$.

C. La fonction f est croissante sur $]-2\ ;\ 2[$.

D. La fonction f est décroissante sur $]-2\ ;\ 2[$.

Pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,2[$, on note :

A le point de coordonnées $(x\ ;\ 0)$,

D le point de coordonnées $(-x\ ;\ 0)$,

B le point de coordonnées $(x\ ;\ f(x))$,

et C le point de coordonnées $(-x\ ;\ f(-x))$.

Question 4

Soit g la fonction qui à tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,2[$ associe l'aire du rectangle ABCD.

On a :

A. $g(x) = x\sqrt{1-0,25x^2}$

B. $g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-0,25x^2}}$

C. $g(x) = \sqrt{4x^2 - x^4}$

D. $g(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{1-0,25x^2}}$

Question 5

Ainsi, la dérivée g' de la fonction g sur $]0\,;\,2[$ peut s'écrire :

A. $g'(x) = \dfrac{1-0,5x^2}{\sqrt{1-0,25x^2}}$

B. $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1-0,25x^2}}$

C. $g'(x) = \dfrac{1-0,5x^2}{2\sqrt{1-0,25x^2}}$

D. $g'(x) = \dfrac{2-x^2}{\sqrt{1-0,25x^2}}$

Question 6

L'aire du rectangle ABCD est alors maximale pour :

A. $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **B.** $x = \sqrt{2}$ **C.** $x = 2$ **D.** $x = 0,5$

Question 7

La valeur maximale S de cette aire est ainsi :

A. $S = 2$ **B.** $S = 1$ **C.** $S = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **D.** $S = 4$

Partie III

Les questions de cette partie sont indépendantes

Question 13

On considère, dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O} \; ; \; \vec{u}, \; \vec{v}\right)$ les points A, B et C d'affixes respectives :

$$a = 1 + \text{i},\ b = 3\text{i},\ c = \left(\sqrt{3} + \frac{1}{2}\right) + \text{i}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\right).$$

A. Le triangle ABC est un triangle rectangle. **B.** Le triangle ABC est un triangle isocèle. **C.** Le triangle ABC est un triangle équilatéral. **D.** Le triangle ABC est un triangle ni rectangle, ni isocèle, ni équilatéral.

Question 14

Soit le nombre complexe $z = \left(\sqrt{3}3 + \text{i}\right)^{1\,515}$.

A. Le nombre complexe z est un réel.

B. Le nombre complexe z est un imaginaire pur.

C. $\arg(z) = \dfrac{1\,515\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

D. $|z| = \left(\sqrt{2}\right)^{1\,515}$.

Question 15

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on note S l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie les conditions :

$$|z - 1| = |z - \text{i}| \quad \text{et} \quad |z - 1 - 2\text{i}| \leqslant 3.$$

On désigne par C le cercle de centre le point de coordonnées $(1\,;\,2)$ et de rayon 3, et par Δ la droite d'équation $y = x$.

A. L'ensemble S est la réunion des ensembles C et Δ

B. L'ensemble S est l'intersection des ensembles C et Δ

C. Soient A et B les points d'intersection de C et Δ. L'ensemble S est le segment [AB].

D. L'ensemble S est réduit au point $\text{I}\left(\dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$

2 Extrait de l'épreuve obligatoire de TSA et TSEEAC 2018

Partie III

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2 + \cos x)\mathrm{e}^{1-x}$.

Question 13

La fonction f vérifie :

1. Il existe un réel α tel que $f(x) \leqslant 0$ si $x \leqslant \alpha$ et $f(x) \geqslant 0$ si $x \geqslant \alpha$
2. Il existe un réel α tel que $f(x) \geqslant 0$ si $x \leqslant \alpha$ et $f(x) \leqslant 0$ si $x \geqslant \alpha$
3. Pour tout réel x, $f(x) < 0$
4. Pour tout réel x, $f(x) > 0$

Question 14

La fonction dérivée f' de f est :

1. $f'(x) = (\sin x)\mathrm{e}^{1-x}$
2. $f'(x) = (2 + \cos x + \sin x)\mathrm{e}^{1-x}$
3. $f'(x) = -(2 + \cos x + \sin x)\mathrm{e}^{1-x}$
4. $f'(x) = -(2 + \cos x - \sin x)\mathrm{e}^{1-x}$

Question 15

On montre que pour tout x :

1. $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos x - \sin x$
2. $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos x + \sin x$
3. $\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos x + \sin x$
4. $\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos x - \sin x$

Question 16

La fonction f' vérifie :

1. Pour tout réel x, $f'(x) < 0$
2. Pour tout réel x, $f'(x) > 0$
3. Il existe un réel β tel que $f'(x) \leqslant 0$ si $x \leqslant \beta$ et $f'(x) \geqslant 0$ si $x \geqslant \beta$
4. Il existe un réel β tel que $f'(x) \geqslant 0$ si $x \leqslant \beta$ et $f'(x) \leqslant 0$ si $x \geqslant \beta$

Question 17

On montre :

1. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
2. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
3. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$
4. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

Question 18

Soit $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $\mathcal{C}$ représentant f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$. On a, en unité d'aire :

1. $\mathcal{A} = 2\mathrm{e} - 2 - \int_0^1 (\cos t)\mathrm{e}^{1-t}\,\mathrm{d}t$
2. $\mathcal{A} = 2\mathrm{e} - 2 + \int_0^1 (\cos t)\mathrm{e}^{1-t}\,\mathrm{d}t$
3. $\mathcal{A} = 2\mathrm{e} - 2 + \sin 1$
4. $\mathcal{A} = 2\mathrm{e} - 2 - \sin 1$

Question 19

Soit $f_1(t) = (\cos t)\mathrm{e}^{1-t}$ et $f_2(t) = (\sin t)\mathrm{e}^{1-t}$, pour t réel. On peut montrer que :

1. $f_1(t) = \frac{1}{2}\left[f_2'(t) - f_1'(t)\right]$
2. $f_1(t) = \frac{1}{2}\left[f_1'(t) - f_2'(t)\right]$
3. $f_2(t) = \frac{1}{2}\left[f_2'(t) + f_1'(t)\right]$
4. $f_2(t) = -\frac{1}{2}\left[f_1'(t) + f_2'(t)\right]$

Question 20

On en déduit que :

1. $\mathcal{A} = \frac{3}{2}\mathrm{e} - \frac{3}{2}$
2. $\mathcal{A} = \frac{3}{2}\mathrm{e} - 2 + \frac{\sin 1 - \cos 1}{2}$
3. $\mathcal{A} = \frac{5}{2}\mathrm{e} - \frac{5}{2}$
4. $\mathcal{A} = \frac{5}{2}\mathrm{e} - 2 + \frac{\cos 1 - \sin 1}{2}$

Partie IV

Soit les nombres complexes $z_1 = 1 - \mathrm{i}$ et $z_2 = \frac{\sqrt{6} - \mathrm{i}\sqrt{2}}{2}$.

Question 21

Les nombres z_1 et z_2 s'écrivent sous forme exponentielle :

1. $z_1 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$
2. $z_1 = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$
3. $z_2 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$
4. $z_2 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$

Question 22

Le nombre complexe $\frac{z_1}{z_2}$ s'écrit sous forme exponentielle :

1. $\dfrac{z_1}{z_2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{12}}$
2. $\dfrac{z_1}{z_2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$
3. $\dfrac{z_1}{z_2} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{12}}$
4. $\dfrac{z_1}{z_2} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$

Question 23

Le nombre complexe $\dfrac{z_1}{z_2}$ s'écrit sous forme algébrique :

1. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$
2. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$
3. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$
4. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

Question 24

On en déduit :

1. $\cos\left(-\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
2. $\cos\left(-\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
3. $\sin\left(-\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
4. $\sin\left(-\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

Question 25

On en déduit :

1. $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = -\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
2. $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
3. $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
4. $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = -\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

3 Extrait de l'épreuve obligatoire de TSA et TSEEAC 2017

PARTIE I

Dans cette partie, i désigne le nombre complexe tel que $i^2 = -1$ et $\mathbb{C}$ représente l'ensemble des nombres complexes.

Question 1

A. une écriture exponentielle du nombre complexe 2i est : $2e^{i\frac{5\pi}{2}}$

B. une écriture exponentielle du nombre complexe -5 est : $-5e^{-i\pi}$.

C. une écriture exponentielle du nombre complexe 2i est : $-2e^{i\frac{\pi}{2}}$

D. une écriture exponentielle du nombre complexe -5 est : $-5e^{i\pi}$

Question 2 :

A. une écriture exponentielle du nombre complexe 0 est : $0e^{i\theta}$, θ étant un nombre réel.

B. 0 n'admet pas d'écriture exponentielle.

C. une écriture exponentielle du nombre complexe $\cos\frac{\pi}{5} - i\sin\frac{\pi}{5}$ est : $e^{i\frac{\pi}{5}}$

D. une écriture exponentielle du nombre complexe $\cos\frac{\pi}{5} - i\sin\frac{\pi}{5}$ est : $e^{-i\frac{\pi}{5}}$

Question 3 : une écriture exponentielle du nombre complexe $2\sin\frac{\pi}{7} + 2i\cos\frac{\pi}{7}$ est :

A. $2e^{i\frac{9\pi}{14}}$ **B.** $2e^{i\frac{5\pi}{14}}$ **C.** $2e^{i\frac{6\pi}{7}}$ **D.** $2e^{i\frac{8\pi}{7}}$

Question 4 : une écriture exponentielle du nombre complexe $\dfrac{-2\sqrt{3}+2i}{(1+i)^4}$ est :

A. $e^{-i\frac{\pi}{6}}$ **B.** $e^{i\frac{7\pi}{12}}$ **C.** $e^{-i\frac{\pi}{6}}$ **D.** $\dfrac{1}{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$

Question 5 : une écriture exponentielle du nombre complexe $\dfrac{i(1+i)^3}{\left(\sqrt{3}-i\right)^5}$ est :

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{32}e^{i\frac{\pi}{12}}$ **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{32}e^{i\frac{5\pi}{12}}$ **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{16}e^{i\frac{\pi}{12}}$ **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{16}e^{i\frac{5\pi}{12}}$

Question 6 : on note $z_1 = 1 + \mathrm{i}$ et $z_2 = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$. La forme algébrique de $z_1 \times z_2$ est :

A. $1 - \sqrt{3} + \mathrm{i}\left(1 - \sqrt{3}\right)$

C. $1 - \sqrt{3} + \mathrm{i}\left(1 + \sqrt{3}\right)$

B. $1 + \sqrt{3} + \mathrm{i}\left(1 + \sqrt{3}\right)$

D. $1 + \sqrt{3} - \mathrm{i}\left(1 - \sqrt{3}\right)$

Question 7 : une écriture exponentielle $z_1 \times z_2$ est :

A. $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{12}}$

B. $2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$

C. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$

D. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$

Question 8 : on déduit que :

A. $\cos\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ et $\sin\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

C. $\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

B. $\cos\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ et $\sin\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

D. $\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

4 Extrait de l'épreuve obligatoire de TSA et TSEEAC 2016

Questions liées : 1 à 7 ; 8 à 10 ; 20 à 25

PARTIE I

Nous rappelons que $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ où i désigne le nombre complexe tel que $i^2 = -1$ et x est un nombre réel.

Si a est un nombre complexe, $|a|$ désigne le module de a et $\arg(a) = \theta\,[2\pi]$ son argument à $2k\pi$ près, k étant un nombre entier relatif.

Autrement dit, $\arg\,(a) = 0 + 2k\pi$.

On en déduit que :

Question 1 :

1. $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$
2. $\cos x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}$
3. $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2i}$
4. $\cos x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$.

Question 2 :

1. $\sin x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$
2. $\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}$
3. $\sin x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2i}$
4. $\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$.

On démontre alors que :

Question 3 :

1. $1 + e^{ix} = \left(\cos\dfrac{x}{2}\right) e^{i\frac{x}{2}}$
2. $1 + e^{ix} = -2i\left(\sin\dfrac{x}{2}\right) e^{i\frac{x}{2}}$
3. $1 + e^{ix} = 2\left(\cos\dfrac{x}{2}\right) e^{i\frac{x}{2}}$
4. $1 + e^{ix} = 2i\left(\sin\dfrac{x}{2}\right) e^{i\frac{x}{2}}$.

Question 4 :

1. $1 - e^{ix} = \left(\cos\dfrac{x}{2}\right) e^{i\frac{x}{2}}$
2. $1 - e^{ix} = -2i\left(\sin\dfrac{x}{2}\right) e^{i\frac{x}{2}}$
3. $1 - e^{ix} = 2\left(\cos\dfrac{x}{2}\right) e^{i\frac{x}{2}}$
4. $1 - e^{ix} = 2i\left(\sin\dfrac{x}{2}\right) e^{i\frac{x}{2}}$.

On en déduit que :

Question 5 :

1. $\left|1+e^{i\frac{\pi}{3}}\right| = 1$ et et $\arg\left(1+e^{i\frac{\pi}{3}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{6} \quad [2\pi]$
2. $\left|1+e^{i\frac{\pi}{3}}\right| = \sqrt{3}$ et et $\arg\left(1+e^{i\frac{\pi}{3}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{6} \quad [2\pi]$
3. $\left|1+e^{i\frac{\pi}{3}}\right| = \sqrt{3}$ et et $\arg\left(1+e^{i\frac{\pi}{3}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{3} \quad [2\pi]$
4. $\left|1+e^{i\frac{\pi}{3}}\right| = 1$ et et $\arg\left(1+e^{i\frac{\pi}{3}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{3} \quad [2\pi]$.

Question 6 :

1. $\left|1-e^{i\frac{\pi}{4}}\right| = 2\cos\frac{\pi}{8}$ et et $\arg\left(1-e^{i\frac{\pi}{4}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{8} \quad [2\pi]$
2. $\left|1-e^{i\frac{\pi}{4}}\right| = 2\sin\frac{\pi}{8}$ et et $\arg\left(1-e^{i\frac{\pi}{4}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{8} \quad [2\pi]$
3. $\left|1-e^{i\frac{\pi}{4}}\right| = 2\sin\frac{\pi}{8}$ et et $\arg\left(1-e^{i\frac{\pi}{4}}\right) \equiv -\dfrac{3\pi}{8} \quad [2\pi]$
4. $\left|1-e^{i\frac{\pi}{4}}\right| = 2\cos\frac{\pi}{8}$ et et $\arg\left(1-e^{i\frac{\pi}{4}}\right) \equiv -\dfrac{3\pi}{8} \quad [2\pi]$

Question 7 :

1. $\left|2+\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right| = 4\cos\dfrac{\pi}{8}$ et $\arg\left(2+\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right) = -\dfrac{\pi}{8} \quad [2\pi]$
2. $\left|2+\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right| = 2\sin\dfrac{\pi}{8}$ et $\arg\left(2+\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right) = -\dfrac{\pi}{8} \quad [2\pi]$
3. $\left|2+\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right| = 4\cos\dfrac{\pi}{8}$ et $\arg\left(2+\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right) = -\dfrac{\pi}{8} \quad [2\pi]$
4. $\left|2+\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right| = 4\cos\dfrac{\pi}{8}$ et $\arg\left(2+\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right) = -\dfrac{\pi}{8} \quad [2\pi]$.

PARTIE II

Question 8 : l'équation $6x^2 - x - 1 = 0$ admet pour solutions les nombres :

1. $\dfrac{1}{3}$ et $-\dfrac{1}{2}$
2. $\dfrac{1}{4}$ et $-\dfrac{1}{2}$
3. $-\dfrac{1}{4}$ et $-\dfrac{1}{2}$
4. $\dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{1}{2}$.

Question 9 : x est solution de l'inéquation $6x^2 - x - 1 > 0$ si est seulement si :

1. $x \in \left]-\infty\ ;\ -\dfrac{1}{2}\right[\cup \left[\dfrac{1}{3}\ ;\ +\infty\right[$.
2. $x \in \left]-\dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{1}{3}\right[$.
3. $x \in \left[-\dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{1}{3}\right]$.
4. $x \in \left]-\infty\ ;\ -\dfrac{1}{3}\right[\cup \left[\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$.

Question 10 : on choisit au hasard un nombre réel x dans l'intervalle $[-1\ ;\ 0]$.

1. La probabilité que ce nombre x soit solution de l'inéquation $6x^2 - x - 1 > 0$ est $\dfrac{1}{3}$.
2. La probabilité que ce nombre x soit solution de l'inéquation $6x^2 - x - 1 > 0$ est $\dfrac{2}{3}$.
3. La probabilité que ce nombre x soit solution de l'inéquation $6x^2 - x - 1 > 0$ est $\dfrac{1}{2}$.
4. Avec les données que nous avons, nous ne pouvons pas calculer la probabilité que ce nombre x soit solution de l'inéquation $6x^2 - x - 1 > 0$.

PARTIE V

On considère l'intégrale I définie par $I = \displaystyle\int_0^1 e^{-t^2}\,dt$ ainsi que les fonctions h et g définies sur l'intervalle $[-1\ ;\ 0]$ par $h(x) = e^x - 1 - x$ et $g(x) = h(x) - \dfrac{1}{2}x^2$.

Question 20 : sur l'intervalle $[-1\ ;\ 0]$:

1. La fonction h est croissante
2. La fonction h est décroissante
3. $h(x) \leqslant 0$
4. $h(x) \geqslant 0$.

Question 21 : on en déduit que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[-1\ ;\ 0]$:

1. La fonction g est croissante.
2. La fonction g est décroissante.
3. $g(x) \leqslant 0$.
4. $g(x) \geqslant 0$.

Question 22 : on déduit que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[-1\ ;\ 0]$:

1. $1 + x \leqslant \mathrm{e}^x$.
2. $1 + x + x^2 \leqslant \mathrm{e}^x$
3. $\mathrm{e}^x \leqslant 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$.
4. $\mathrm{e}^x \leqslant 1 + x$.

Question 23 : on déduit alors que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\ ;\ 1]$:

1. $1 + x^2 \leqslant \mathrm{e}^x \leqslant 1 + x^2 + \dfrac{x^4}{2}$
2. $1 + x^2 + \dfrac{x^4}{2} \leqslant \mathrm{e}^x \leqslant 1 + x^2$
3. $1 - x^2 \leqslant \mathrm{e}^{-x^2} \leqslant 1 - x^2 + \dfrac{x^4}{2}$
4. $1 - x^2 + \dfrac{x^4}{2} \leqslant \mathrm{e}^{-x^2} \leqslant 1 - x^2$.

Question 24 : on déduit aussi que :

1. $\dfrac{2}{3} \leqslant \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{5}$
2. $\dfrac{2}{3} \leqslant \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{10}$
3. $\dfrac{4}{3} \leqslant \dfrac{23}{15}$
4. $\dfrac{23}{15} \leqslant I \leqslant \dfrac{5}{3}$.

Question 25 : on en déduit une valeur approchée de I :

1. $I \approx \dfrac{23}{30}$ à + ou $-0,1$ près
2. $I \approx \dfrac{43}{60}$ à + ou $-0,05$ près
3. $I \approx \dfrac{43}{30}$ à + ou $-0,1$ près
4. $I \approx \dfrac{24}{15}$ à + ou $-0,05$ près.

5 Extrait de l'épreuve optionnelle de TSA et TSEEAC 2016

Notations

Les lettres $\mathbb{R}$ et $\mathbb{N}$ désignent respectivement les ensembles des réels et des entiers naturels.

La lettre e désigne la constante de Neper et l'application qui à x associe e^x désigne l'exponentielle de base e.

Le nombre i désigne le nombre complexe défini par $2^2 = -1$.

Question 1

Soient deux suites u et v vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant 2u_n.$$

A. Si pour tout $n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n < 1$, alors la suite v converge.

B. Si la suite u converge, alors la suite v converge.

C. Si pour tout $n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n < 1$, alors la suite u converge.

D. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Question 2

L'équation réduite de la tangente en -1 à la courbe représentative de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x^3+x^2}$ est :

A. $3x - 3y + 6 = 0$ **A.** $y = x + 2$ **A.** $y = x - 2$ **A.** $-2x + 2y + 4 = 0$

Question 3

La valeur moyenne M de la fonction $f : x \longmapsto x^3 + x^2 - x + 1$ sur $[-1\ ;\ 2]$ est :

A. $M = 3$ **B.** $M = 5$ **C.** $M = \dfrac{33}{4}$ **D.** $M = \dfrac{11}{4}$

Question 4

Une primitive de la fonction f définie par $f(x) = xe^{-x}$ est :

A. $F(x) = xe^{-x}$

B. $F(x) = -xe^{-x}$

C. $F(x) = (-x - 1 + 2e^x)e^{-x}$

D. $F(x) = (-x + 1)e^{-x}$

Question 5

Soient f et g deux fonctions continues sur $I = [a\ ;\ b]$.

A. Si pour tout réel x de I , on a $f(x) = g(x)$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

B. Si $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$, alors pour tout réel x de I , on a $f(x) = g(x)$

C. Si pour tout réel x de I, on a $f(x) < g(x)$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

D. Si $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ alors pour tout réel x de 1 , on a $f(x) \geqslant g(x)$

Question 6

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$. par $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a < 0$ et $b^2 - 4ac > 0$. Soit S l'aire de la surface sous l'arche parabolique, comprise entre la droite d'équation $y = 0$ et la courbe représentative de f.

A. S vaut le tiers de sa base multipliée par la hauteur de l'arche.

B. S vaut la moitié de sa base multipliée par la hauteur de l'arche.

C. S vaut les deux tiers de sa base multipliée par la hauteur de l'arche.

D. S vaut les trois quarts de sa base multipliée par la hauteur de l'arche.

Question 7

Soit $z = -\sqrt{3} + \mathrm{i}$.

A. $z^{2\,013}$ est un imaginaire pur

B. $z^{2\,014}$ est un imaginaire pur

C. $z^{2\,015}$ est un réel

D. $z^{2\,016}$ est un réel

Question 8

L'ensemble S des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $\dfrac{z-8}{z-3} = z$ est

A. $S = \{2 + 2\mathrm{i}\}$

B. $S = 2 - 2\mathrm{i}$

C. $S = 2 + 2\mathrm{i}\ ;\ -2 + 2\mathrm{i}$

D. $S = \emptyset$

Question 9

Soient A, B et O les points d'affixes respectives 1, i et 0. L'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z - 1| = |\overline{z} + \mathrm{i}|$ est

A. la droite (AB)

B. la médiatrice du segment [AB]

C. le cercle de centre O et de rayon 1

D. le cercle de diamètre [AB]

6 Extrait de l'épreuve obligatoire de TSA et TSEEAC 2015

Questions liées : 1–2–4–5 ; 6 et 7 ; 9 et 10 ; 11 à 13

PARTIE 1

On considère la fonction polynôme Q définie pour tout nombre réel x par $Q(x) = -2x^3 + 3x^2 + 1$, et la fonction g définie pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$, par $g(x) = \dfrac{1-x}{1+x^3}$. On note C_g la courbe représentative de la fonction g.

Question 1 : en étudiant les variations de la fonction polynôme Q, on démontre que :

A. Le polynôme Q n'admet aucune racine réelle.

B. Le polynôme Q admet une unique racine réelle notée a appartenant à l'intervalle $]1\,;\,2[$.

C. Le polynôme Q admet uniquement deux racines réelles notées α et β appartenant respectivement aux intervalles $]1\,;\,2[$ et $]0\,;\,1[$.

D. Le polynôme Q admet uniquement trois racines réelles notées α , β et γ appartenant respectivement aux intervalles $]1\,;\,2[$, $]0\,;\,1[$ et $]-\infty\ ;\ 0[$.

Question 2 : on démontre que :

A. Pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$, la fonction dérivée de la fonction g est $g'(x) = \dfrac{-Q(x)}{(1+x^3)^2}$.

B. Pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$, la fonction dérivée de la fonction g est $g'(x) = \dfrac{Q(x)}{(1+x^3)^2}$.

C. La fonction g est croissante sur l'intervalle $]\alpha\ ;\ +\infty[$ et décroissante sur l'intervalle $]-1\ ;\ \alpha[$.

D. La fonction g est croissante sur l'intervalle $]-1\ ;\ \alpha[$ et décroissante sur l'intervalle $]\alpha\ ;\ +\infty[$.

Question 3 : on établit que :

A. $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 1$.

B. $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

C. $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

D. $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

Question 4 : on établit que la courbe représentative C_g de la fonction g admet une tangente (Δ) au point d'abscisse 0 :

A. qui a pour équation : $y = -x + 1$.

B. qui a pour équation : $y = x + 1$.

C. qui a pour équation : $y = x - 1$.

D. qui a pour équation : $y = -x - 1$.

Question 5 : on démontre que la tangente (Δ) est :

A. Au-dessous de la courbe C_g sur l'intervalle $]-1\ ,\ 1[$.

B. Au-dessus de la courbe C_g sur l'intervalle $]-1\ ,\ 1[$.

C. Au-dessous de la courbe C_g sur l'intervalle $]-1\ ,\ 0[$ et au-dessus de la courbe C_g sur $]0\ ,\ 1[$.

D. Au-dessus de la courbe C_g sur l'intervalle $]-1\ ,\ 0[$ et au-dessous de la courbe C_g sur $]0\ ,\ 1[$.

Question 6 : en déterminant trois réels a, b et c tels que $g(x) = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{bx+c}{x^2-x+1}$ on établit que

A. $g(x) = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2x-1}{x^2-x+1}$.

B. $g(x) = \dfrac{2}{x+1} + \dfrac{2x-1}{x^2-x+1}$.

C. $g(x) = -\dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2x-1}{x^2-x+1}$.

D. $g(x) = \dfrac{3}{2} \times \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{2x-1}{x^2-x+1}$.

Question 7 : la fonction g est une fonction continue sur l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$, donc elle est intégrable sur cet intervalle. Ainsi $G(x) = \displaystyle\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$ est définie et on établit que :

A. $G(1) = 2\ln 2$. **B.** $G(1) = \dfrac{2}{3}\ln 2$. **C.** $G(1) = -\dfrac{2}{3}\ln 2$. **D.** $G(1) = \dfrac{3}{2}\ln 2$.

PARTIE II

Soit f la fonction définie par l'expression suivante : $f(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}$.

On note C_f la courbe représentative de cette fonction.

Question 8 : on établit que :

A. La fonction f est définie sur l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$.

B. La fonction f est définie sur l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$.

C. La fonction f est définie sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ -1[$.

D. La fonction f est définie sur l'intervalle $]-1\ ;\ 1[$.

Question 9 : on démontre que la fonction f :

A. n'est pas dérivable à gauche de 1.

B. est dérivable à droite de -1.

C. est dérivable à gauche de 1.

D. n'est pas dérivable à droite de -1.

Question 10 : on démontre que la courbe représentative C_f de cette fonction f :

A. admet, au point d'abscisse 1, une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

B. admet, au point d'abscisse -1, une tangente parallèle à l'axe des ordonnées.

C. admet, au point d'abscisse 1, une demi-tangente parallèle à l'axe des abscisses.

D. admet, au point d'abscisse -1, une demi-tangente parallèle à l'axe des ordonnées.

Question 11 : pour $x \in]-1\ ;\ 1[$, on établit que la fonction f admet pour dérivée :

A. $f'(x) = \dfrac{(x-1)(2x+1)}{2\sqrt{1-x^2}}$

B. $f'(x) = \dfrac{(x-1)(2x+1)}{\sqrt{1-x^2}}$

C. $f'(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

D. $f'(x) = \dfrac{(x-1)(3x+2)}{2\sqrt{1-x^2}}$

Question 12 : à partir d'un tableau de variation, on démontre que la courbe représentative C_f admet au point d'abscisse $-\dfrac{1}{2}$

A. un maximum qui vaut $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

B. un minimum qui vaut $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

C. un maximum qui vaut $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

D. un minimum qui vaut $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Question 13 : on donne $\sqrt{3} \approx 1,7$. On démontre que l'équation $f(x) = 1$

A. n'admet pas de solution.

B. admet une solution et une seule.

C. admet au plus deux solutions.

D. admet au moins deux solutions.

7 Extrait de l'épreuve optionnelle de TSA et TSEEAC 2015

Questions liées : 1 à 3 ; 4 à 9

PARTIE I

On considère le nombre complexe $z = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.

Question 1 :

A. Une forme exponentielle de z est $z = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$.

B. Une forme exponentielle de z est $z = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}$.

C. Une forme exponentielle de z est $z = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}$.

D. Une forme exponentielle de z est $z = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$.

Question 2 :

A. La forme algébrique de z^{-1} est $z^{-1} = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}$.

B. La forme algébrique de z^{-1} est $z^{-1} = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}$.

C. forme algébrique de z^{-1} est $z^{-1} = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}$.

D. La forme algébrique de z^{-1} est $z^{-1} = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}$.

Question 3 :

A. La forme algébrique de z^2 est $z^2 = -2 - 2\sqrt{3}\mathrm{i}$.

B. La forme algébrique de z^2 est $z^2 = 2 - 2\sqrt{3}\mathrm{i}$.

C. La forme algébrique de z^3 est $z^3 = -8$.

D. La forme algébrique de z^3 est $z^3 = 8$.

PARTIE II

Pour tout nombre entier naturel n, on définit le terme général de la suite (J_n) par l'intégrale suivante : $J_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

Question 4 : on établit que

A. $J_1 = \ln 2$. **B.** $J_1 = 2\ln 2$. **C.** $J_1 = \frac{\ln 2 - 1}{2}$. **D.** $J_1 = \frac{\ln 2}{2}$.

Question 5 : on démontre que

A. $J_n + J_{n+2} = \dfrac{2}{n+1}$ **B.** $J_n + J_{n+2} = \dfrac{2}{n+2}$ **C.** $J_n + J_{n+2} = \dfrac{1}{n+2}$ **D.** $J_n + J_{n+2} = \dfrac{1}{n+1}$

Question 6 : on établit que

A. $J_n = \dfrac{1-\ln 2}{2}$. **B.** $J_n = \dfrac{4-3\ln 2}{6}$. **C.** $J_n = \dfrac{-1+2\ln 2}{4}$. **D.** $J_n = \dfrac{-1+6\ln 2}{12}$.

Question 7 : on établit que

A. $\displaystyle\int_0^1 \frac{t+2t^3+2t^5}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \ln 2 + \frac{1}{2}$.

C. $\displaystyle\int_0^1 \frac{t+2t^3+2t^5}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \ln\left(\sqrt{2\mathrm{e}}\right)$.

B. $\displaystyle\int_0^1 \frac{t+2t^3+2t^5}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \ln 2 + \frac{1}{2}$.

D. $\displaystyle\int_0^1 \frac{t+2t^3+2t^5}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\ln 2 + 1}{2}$.

Question 8 : on démontre que la suite (J_n) est

A. convergente car elle est croissante majorée.

B. divergente car elle est croissante non majorée.

C. divergente car elle est décroissante non minorée.

D. convergente car elle est décroissante minorée.

Question 9 : en utilisant l'un des résultats précédents, on démontre que

A. $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = 0$. **B.** $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = +\infty$. **C.** $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = -\infty$ **D.** $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = 1$