Activité : Introduction aux EDLO2 homogènes

Les équations différentielles linéaires d'ordre 2 que l'on abrège en EDLO2 sont des équations faisant intervenir une fonction, sa dérivée et la dérivée seconde. Les solutions d'une telle équation sont donc au moins deux fois dérivables. Nous aborderons seulement les EDLO2 à coefficients constants.

Les EDLO2 à coefficients constants sont du type : $$\boldsymbol{ay''(t) + by'(t) + cy(t) = d(t)} \qquad (\mathbf{1})$$

Ici les nombre $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ sont des réels (avec $a \neq 0$, pourquoi ?) et $\boldsymbol{d(t)}$ une fonction continue réelles. Une première conséquence de ce choix est qu'une solution sera nécessairement $\mathcal{C}^{\mathbf{2}}$. Pourquoi ?

A. Généralités

Les EDLO2 homogène à coefficients constants sont du type :

$$\boldsymbol{ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0}$$

1. Expliquer pourquoi on a
$$\boldsymbol{ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{y''(t) + dy'(t) + fy(t) = 0} \qquad (\mathbf{2})$$
Avec e et f que vous déterminerez.

Combinaison linéaire de solution

Soit y_1 et y_2 deux solutions de (2) non proportionnelle i.e. il n'existe pas de constante k telle que $y_1 = ky_2$ alors $y_1 + y_2$ est une solution de (2).

2. Pourquoi ?

Equation caractéristique

On souhaiterait trouver une forme de solution qui ressemble à celle des EDLO1 soit $y(t) = Ae^{rt}$ avec r un nombre (réel ou complexe)

3. Dérivez deux fois $y(t)$
4. En supposant que $y(t)$ est une solution de (2) et en utilisant (2) montrez qu'alors r est nécessairement solution de l'équation $X^2 + dX + f = 0$

On appelle le polynôme $X^2 + dX + f$ le **polynôme caractéristique associé à l'équation** $(\mathbf{2})$.

B. Types de solutions

Cas où le discriminant est positif

1. Dans le cas où le polynôme caractéristique possède deux racines réelles notée r_1 et r_2, écrire deux solutions différentes de l'équation différentielle.
2. Pourquoi la somme des deux fonctions précédentes est encore solution de (2) ?

Conclusion : On admet alors que les solutions de l'EDLO2 de ce type sont les fonctions

$$y_H(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \qquad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}$$

Cas où le discriminant est négatif

Dans ce cas le polynôme caractéristique possède deux racines complexes, r_1 et r_2.

Alors $Re(r_1) = Re(r_2)$ et $Im(r_1) = -Im(r_2)$ car r_1 et r_2 sont des solutions d'un polynôme de degré 2.

On note $\alpha = Re(r_1)$ et $\beta = Im(r_1)$

3. Sur le modèle précédent écrire deux solutions de (2)
4. Pourquoi la somme des deux fonctions précédentes est encore solution de (2) ?

Arrivé ici, le problème est le suivant : les fonctions solutions trouvées sont à valeurs complexes et nous souhaitons des fonctions à valeurs réelles.

1. En considérant $y_1(t) = e^{r_1 t}$ et $y_2(t) = e^{r_2 t}$ établir l'égalité $\frac{1}{2}(y_1 + y_2) = e^{\alpha t}\cos(\beta t)$. On pourra utiliser les formules d'Euler.
   Cette fonction est-elle à valeurs réelles ou complexes ? Est-elle solution de (2) ? Justifier.
2. De même en considérant $y_1(t) = e^{r_1 t}$ et $y_2(t) = e^{r_2 t}$ établir l'égalité $\frac{1}{2i}(y_1 - y_2) = e^{\alpha t}\sin(\beta t)$. . On pourra utiliser les formules d'Euler.
   Cette fonction est-elle à valeurs réelles ou complexes ? Est-elle solution de (2) ? Justifier.
3. Pourquoi la somme des fonctions $e^{\alpha t}\cos(\beta t)$ et $e^{\alpha t}\sin(\beta t)$ est encore solution de (2) ?

Conclusion : On admet alors que les solutions de l'EDLO2 de ce type sont les fonctions

$$y_H(t) = e^{\alpha t}(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)) \qquad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}$$

Cas où le discriminant est nul

Soit r la solution double du polynôme caractéristique $X^2 + dX + f$.

4. Montrer que r est aussi racine de $2X + d$

Nous savons déjà que $y_1(t) = e^{rt}$ est solution de (2)

5. Montrer que $y_2(t) = te^{rt}$ est aussi solution de (2)
6. Pourquoi la somme des deux fonctions précédentes est encore solution de (2) ?

Conclusion : On admet alors que les solutions de l'EDLO2 de ce type sont les fonctions :

$$y_H(t) = (At + B)e^{rt} \qquad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}$$