Activité : Introduction aux EDLO1

Les équations différentielles linéaires d'ordre 1 que l'on abrège en EDLO1 sont des équations faisant intervenir une fonction et sa dérivée. Les solutions d'une telle équation sont donc au moins dérivables.

Les EDLO1 sont du type : $\boldsymbol{a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)}$

Dans cette leçon, on se restreint au cas où les fonctions $\boldsymbol{a(t), b(t), c(t)}$ sont des fonctions continues. Un première conséquence de ce choix est qu'une solution sera nécessairement $\mathcal{C}^{\mathbf{1}}$. Pourquoi ?

A. EDLO1 à coefficient constant

Commençons notre approche de la résolution d'EDLO1 par considérer que les fonctions $\boldsymbol{a(t), b(t), c(t)}$ sont des fonctions constantes que l'on note $\boldsymbol{a, b, c}$.

Nécessairement $a \neq 0$ et $b \neq 0$. Pourquoi ?

Résolution EDOL1 homogène à coefficients constants

On appelle équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 à coefficients constants les équations du type :

$$\boldsymbol{ay'(t) + by(t) = 0}$$

Autrement dit $c = 0$

1. Pourquoi la résolution de ce type d'équation est équivalente à la résolution de $\boldsymbol{y'(t) + dy(t) = 0}$ avec d que vous déterminerez ?
2. On peut alors écrire $\boldsymbol{y'(t) + dy(t) = 0} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{y'(t) = -dy(t)}$
   Si l'on suppose que $y(t)$ n'est pas identiquement nulle alors il existe un réel t_0 tel que $y(t_0) \neq 0$ et par continuité de y on sait qu'il existe un petit intervalle, noté I, autour de t_0 où y n'est jamais nulle (nous ne prouverons pas ce fait)

   On peut alors écrire pour $t \in I$: $\boldsymbol{y'(t) = -dy(t)} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\frac{y'(t)}{y(t)} = -d}$

   En utilisant cette dernière équation déterminer une primitive de $\boldsymbol{\frac{y'(t)}{y(t)}}$ puis une expression pour $y(t)$ sur I.

Conclusion : Vous venez de démontrer que sur un intervalle où $y(t)$ ne s'annule pas les solutions sont de la forme

$$y(t) = Ae^{-dt}$$

3. En utilisant la continuité de y dire pourquoi $I = \mathbb{R}$ dans le cas d'une **équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 à coefficients constants**

On appelle une solution de ce type d'équation : solution homogène, souvent notée $\boldsymbol{y_H}$

Solution particulière

Considérons maintenant les équations du type $\boldsymbol{ay'(t) + by(t) = c}$ **avec** $\boldsymbol{c \neq 0}$

On appelle solution particulière une fonction solution de l'équation précédente. On note souvent ces solutions y_P

4. Supposons que la fonction y_P est une fonction constante, à quoi sera-t-elle égale ?
5. Considérons l'équation $2y' + 5y = 6$ et une solution particulière constante, déterminer sa valeur.

Principe de superposition

Considérons deux EDLO1 $\boldsymbol{ay'(t) + by(t) = c}$ $\quad (\mathbf{1})$ et $\boldsymbol{ay'(t) + by(t) = d}$ $\quad (\mathbf{2})$

Notons une solution particulière de (1) y_1 et une solution particulière de (2) y_2

6. De quelle équation différentielle sera solution la fonction $y_1 + y_2$?

Ensemble de solutions d'une EDLO1

7. Soit y_1 et y_2 deux solutions de l'EDLO1 $\boldsymbol{ay'(t) + by(t) = c}$
   De quelle équation différentielle la fonction $y_1 - y_2$ sera-t-elle solution ?
   Exprimer alors y_1 en fonction de y_2 et y_H (solution de l'équation homogène associée : $\boldsymbol{ay'(t) + by(t) = 0}$)
8. En utilisant le principe de superposition, expliquer pourquoi l'ensemble des solutions d'une EDOL1 à coefficients constants du type : $\boldsymbol{ay'(t) + by(t) = c}$ sera la somme de sa solution homogène et d'une solution particulière.

Conclusion : Vous venez de démontrer que l'ensemble des solutions de l'équation $\boldsymbol{ay'(t) + by(t) = c}$ est l'ensemble des fonctions qui s'écrivent $y(t) = y_H(t) + y_P(t)$

9. Pouvez-vous élaborer une méthode de résolution des EDLO1 à coefficients constants ?

B. EDLO1 homogène à coefficients variables.

Ici nous nous intéresserons à la résolution des équations homogènes seulement. Autrement dit les équations du type

$$\boldsymbol{a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0}$$

Considérons un intervalle I où $a(t) \neq 0$, c'est possible lorsque $a(t)$ n'est pas identiquement nulle car elle est continue.

On peut alors écrire $\boldsymbol{y'(t) + \frac{b(t)}{a(t)}y(t) = 0} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{y'(t) = -\frac{b(t)}{a(t)}y(t)}$

De la même façon que précédemment si y n'est pas identiquement nulle sur I alors on peut considérer un petit intervalle J dans I où elle n'est jamais nulle.

On peut alors écrire pour $t \in J$: $\quad \boldsymbol{y'(t) = -\frac{b(t)}{a(t)}y(t)} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\frac{y'(t)}{y(t)} = -\frac{b(t)}{a(t)}}$

1. Dire pourquoi la fonction $\boldsymbol{-\frac{b(t)}{a(t)}}$ possède une primitive ? On notera $G(t)$ cette primitive sur J
2. En utilisant cette dernière équation déterminer une primitive de $\boldsymbol{\frac{y'(t)}{y(t)}}$ puis une expression pour $y(t)$ sur J.
3. En utilisant la continuité de y dire pourquoi $I = J$

Solution particulière

Considérons maintenant les équations du type $\boldsymbol{a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)}$

On appelle solution particulière une fonction solution de l'équation précédente. On note souvent ces solutions y_P.

4. Montrer que la fonction $f(t) = \cos(t)$ est solution particulière de l'équation différentielle
$$\sin(t)\ y'(t) + \cos(t)\ y(t) = \cos(2t)$$

La recherche de solution particulière est souvent difficile. Dans des cas particuliers de second membres, il existe des méthodes dont certaines sont détaillées sous forme d'exemple dans votre cours. La plupart du temps, une solution particulière vous sera proposée et il suffira de vérifier qu'elle satisfait l'équation.

Principe de superposition

Considérons deux EDLO1 $\boldsymbol{a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)} \quad \boldsymbol{(1)}$ et $\boldsymbol{a(t)y'(t) + b(t)y(t) = d(t)} \quad \boldsymbol{(2)}$

Notons une solution particulière de (1) y_1 et une solution particulière de (2) y_2

5. De quelle équation différentielle sera solution la fonction $y_1 + y_2$?

Ensemble de solutions d'une EDLO1

6. Soit y_1 et y_2 deux solutions de l'EDLO1 $\boldsymbol{a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)}$
   De quelle équation différentielle la fonction $y_1 - y_2$ sera-t-elle solution ?
   Exprimer alors y_1 en fonction de y_2 et y_H (solution de l'équation homogène : $\boldsymbol{a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0}$)
   Remarque : Des intervalles de définition de y_1, y_2 et y_H on prend l'intersection des trois pour que tout soit bien défini.
7. En utilisant le principe de superposition, expliquer pourquoi l'ensemble des solutions d'une EDOL1 :
   $\boldsymbol{a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)}$ sera la somme de sa solution homogène et d'une solution particulière.

Conclusion : Vous venez de démontrer que l'ensemble des solutions de l'équation $\boldsymbol{a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)}$ est l'ensemble des fonctions qui s'écrivent $y(t) = y_H(t) + y_P(t)$

8. Pouvez-vous élaborer une méthode de résolution des EDLO1 ?