Sommaire

1 Utiliser la notation factortielle

Exercice 1

Dans la fraction suivante, le numérateur est le produit des n premiers nombres impairs, et le dénominateur est le produit des n premiers nombres pairs :

$$Q_n = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)} \qquad (n \in \mathbb{N}^\star)$$

Exprimer Q_n d'une manière plus "compacte", au moyen de factorielles.

Exercice 2

Simplifier l'expression $\dfrac{1}{(n-1)!} - \dfrac{1}{(n+1)!}$

Exercice 3

Quel est le dernier chiffre de 257! ?

2 Utiliser le symbole $\sum$

Exercice 4

Pour chaque question, une seule réponse est juste. Laquelle ?

1. La somme $\sum_{k=0}^{n} 2$

   a. n'a pas de sens b. vaut $2(n+1)$ c. vaut $2n$

2. La somme $\sum_{p=0}^{2n+1} (-1)^p$ est égale à

   a. 1 b. -1 c. 0

Exercice 5 (À l'aide du symbole somme)

Écrire à l'aide du symbole somme $\sum$ les sommes suivantes :

1. $2^3 + 2^4 + \cdots + 2^{12}$.
2. $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{4} + \dfrac{3}{8} + \cdots + \dfrac{10}{1024}$.
3. $2 - 4 + 6 - 8 + \cdots + 50$.
4. $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \cdots + \dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n}$.
5. $n + (n+1) + \cdots + 2n$;
6. $\dfrac{x_1}{x_n} + \dfrac{x_2}{x_{n-1}} + \cdots + \dfrac{x_{n-1}}{x_2} + \dfrac{x_n}{x_1}$.

Exercice 6 (Différence de deux sommes)

Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$. Simplifier $u_{n+1} - u_n$.

Exercice 7 (Somme des cubes d'entiers,...)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on rappelle que : $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

1. Développer $(n+1)^4$
2. À partir du développement précédent calculer $\sum_{k=1}^{n} k^3$

Exercice 8 (Changement d'indice)

1. Calculer la somme suivante $\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)$.
2. Calculer la somme suivante $\sum_{k=1}^{n}(k+1)^2$.
3. Calculer la somme $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k}\right)$.

Exercice 9 (Télescopage)

1. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{(k+1)(k+3)} = \frac{a}{k+1} + \frac{b}{k+3}$.

   En déduire la valeur de la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+3)}$.

Exercice 10 (Somme télescopique et factorielle)

1. Calculer la somme $\sum\limits_{k=0}^{n} k(k!)$
2. Calculer la somme $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$

Exercice 11 (Transformer en somme télescopique)

1. Déterminer une suite (u_k) telle que, pour tout $k \geq 0$, on ait $u_{k+1} - u_k = (k+2)2^k$.
2. En déduire $\sum_{k=0}^{n}(k+2)2^k$.

Exercice 12 (Somme et factorielles)

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $(n+1)! \geq \sum_{k=1}^{n} k!$.

3 Formule du binôme de Newton et coefficients binomiaux

Exercice 13 (Factorielle et coefficients binomiaux)

1. Soient $n, p \geq 1$. Démontrer que $\binom{n-1}{p-1} = \frac{p}{n}\binom{n}{p}$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $a, , b$ réels non nuls, simplifier les expressions suivantes :

   a. $(n+1)! - n!$ b. $\frac{(n+3)!}{(n+1)!}$ c. $\frac{n+2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!}$

Exercice 14 (Égalité de coefficients binômiaux)

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour quels entiers $p \in \{0, \ldots, n-1\}$ a-t-on $\binom{n}{p} < \binom{n}{p+1}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $p \in \{0, \ldots, n\}$. Pour quelle(s) valeur(s) de $q \in \{0, \ldots, n\}$ a-t-on $\binom{n}{p} = \binom{n}{q}$?

Exercice 15 (Formule du binôme de Newton)

Démontrer que $(a-b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^{n-k}a^k\, b^{n-k}$

En déduire la valeur de $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^{n-k}$

Exercice 16 (Formule du binôme)

1. Développer $(x+1)^6$, $(x-1)^6$.
2. Démontrer que, pour tout entier n, on a $\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$.
3. Démontrer que, pour tout entier n, on a $\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}2^p = 3^n$.
4. Démontrer que, pour tout entier n, on a $\sum_{k=1}^{2n} \binom{2n}{k}(-1)^k 2^{k-1} = 0$.

4 Démonstrations par récurrence

Exercice 17 (Somme des entiers, des carrés,...)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $a_n = \sum_{k=1}^{n} k$, $b_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$ et $c_n = \sum_{k=1}^{n} k^3$.

Démontrer que $a_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, que $b_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et que $c_n = a_n^2$.

Exercice 18

Démontrer l'inégalité de Bernoulli : Pour tout $x \geq 1$ et n entier on a : $(1+x)^n \geq 1+nx$

Exercice 19

Démontrer l'égalité de Bernoulli : $a^n - b^n = \sum\limits_{k=0}^{n} a^k\, b^{n-k}$

Remarque on retrouve l'identité remarquable que l'on connait déjà : $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

Développer $(a+1)^4 - a^4$