Sommaire

1 Généralités

Exercice 1

Soit $P(X) = 5X^4 - 3X^3 + 17,5X^2 - \frac{2}{3}X + 1,512$ et $Q(X) = -2X^3 + \frac{7}{8}X^2 - 6$.

1. Quels sont les degré de P et Q ?
2. Faites la liste ordonnée suivant le degré des coefficients de P et Q
3. Quel sera le degré du polynôme $P + Q$?
4. Quel sera le degré du polynôme PQ ?

Exercice 2

Soient a, b des réels, et $P(X) = X^4 + 2aX^3 + bX^2 + 2X + 1$. Pour quelles valeurs de a et b le polynôme P est-il le carré d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$?

Exercice 3

Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne de

1. $X^4 + 5X^3 + 12X^2 + 19X - 7$ par $X^2 + 3X - 1$;
2. $X^4 - 4X^3 - 9X^2 + 27X + 38$ par $X^2 - X - 7$;
3. $X^5 - X^2 + 2$ par $X^2 + 1$.

Exercice 4

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$. Sachant que le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)$ vaut 1 et que le reste de la division euclidienne de P par $X - b$ vaut -1, que vaut le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b)$?

Exercice 5

Soit $P(X) = a_nX^n + \cdots + a_0$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$, avec $a_n \neq 0$ et $a_0 \neq 0$. On suppose que P admet une racine rationnelle p/q avec $p \wedge q = 1$. (p et q sont premiers entre eux)

Démontrer que $p | a_0$ et que $q | a_n$.

Le polynôme $P(X) = X^5 - X^2 + 1$ admet-il des racines dans $\mathbb{Q}$?

Exercice 6

1. Écrire $\dfrac{X^3+X+1}{X-1}$ sous la forme $P+\dfrac{a}{X-1}$ où $a\in\mathbb{R}$ et P un polynôme.
2. Écrire $\dfrac{X^3-5X^2+X}{X+1}$ sous la forme $Q+\dfrac{b}{X+1}$ où $b\in\mathbb{R}$ et Q un polynôme.

Exercice 7

1. Trouver les réels a, b et c tels que : $\dfrac{X^2}{(X-1)(X+2)(X+3)}=\dfrac{a}{X-1}+\dfrac{b}{X+2}+\dfrac{c}{X+3}$
2. Trouver les réels a, b et c tels que : $\dfrac{5X+2}{X^2(1+X)}=\dfrac{a}{X}+\dfrac{b}{X^2}+\dfrac{c}{1+X}$

Un quotient de polynôme s'appelle une **fraction rationnelle**. Ce genre de décomposition d'une fraction rationnelle s'appelle une décompostion en éléments simples. Elle est très utile pour intégrer, dériver et bien d'autres calculs avec les fractions rationnelles.

2 Polynômes du segond degré

Exercice 8 (Forme canonique d'un polynôme du second degré – Exploitation)

Pour chacun des polynômes suivants, déterminer la forme canonique puis résoudre l'équation $P(x)=0$.

1. $P(x)=x^2+2x-8$
2. $P(x)=-x^2-6x+7$
3. $P(x)=2x^2+4x-3$
4. $P(x)=x^2-2x+2$

Exercice 9 (Factorisation d'un polynôme du second degré)

Pour chacun des polynômes P suivants :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x)=0$
2. Déterminer, si elle existe, la forme factorisée de P
3. Vérifier graphiquement vos résultats en traçant, sur votre calculatrice, la courbe représentative du polynôme P.

(a) $P(x)=x^2-2x+2$

(b) $P(x)=2x^2-7x+3$,

(c) $P(x)=-7x^2+4x+11$,

(d) $P(x)=6x^2-12x+6$,

(e) $P(x)=-3x^2+8x-11$,

(f) $P(x)=-x^2+3x+10$,

(g) $P(x)=-x^2+x+2-\sqrt{2}$.

Exercice 10

Résoudre les équations du second degré suivantes, donner la valeur exacte de la solution puis une valeur approchée à 10^{-3} près.

1. $6x^2+5x-4=0$
2. $x^2+\dfrac{5}{2}+1=0$
3. $x^2+2x\sqrt{3}-1=0$

Exercice 11

Donner le tableau de signes puis le tableau de variations de la fonction polynôme suivante :

1. $3x^2-4x+5$
2. $-2x^2-x+15$
3. $2x^2+5x+\frac{25}{8}$

Exercice 12

Soit la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 3x + 5$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$
2. Donner un tableau de signe de $f(x)$ lorsque x varie dans $\mathbb{R}$
3. En déduire l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $f(x) \leq 0$

Exercice 13

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $(x+5)(x-7) \geq 0$
2. $-9x^2 + 6x - 1 \leq 0$

Exercice 14

Une étude sur la résistance à la traction d'une poutre en tube dont lépaisseur de la paroi (en mm) est e, conduit à l'équation suivante : $\pi e^2 + 400\pi e - 3.10^{-4} = 0$

Donner la valeur approchée arrondie à 10^{-1} de e.

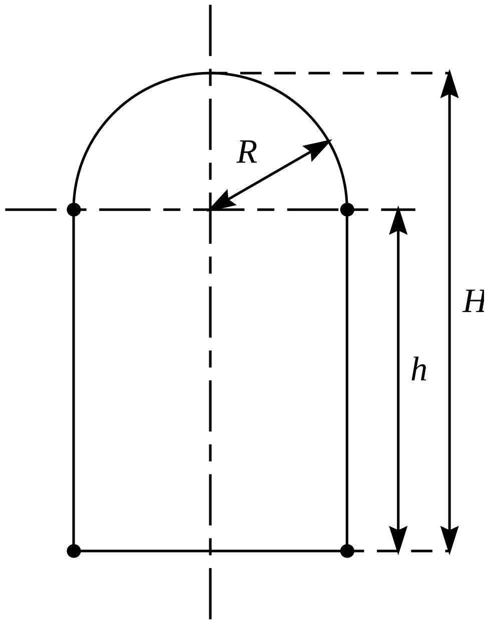
Exercice 15

Un ballon d'eau chaude est composé d'un cylindre et d'une demi-sphère.

L'aire de la surface totale de tôle utilisée pour construire l'appareil est de $5m^2$ et la hauteur H est $1m$. Déterminer le rayon R et la hauteur h du cylindre.

On donnera des valeurs approchées en mètres, à 10^{-3} près des résultats.

On admet que l'aire d'une sphère de rayon R est $4\pi R^2$.



Exercice 16

On appelle polynôme symétrique un polynôme dont les coefficients peuvent se lire indifféremment dans un sens comme dans l'autre.

Exemple : $f(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 1$.

Le but de l'exercice est de résoudre l'équation (E) : $x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 1 = 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Vérifier que 0 n'est pas solution de (E).
2. Montrer que si x_0 est solution de (E), alors $\dfrac{1}{x_0}$ est solution de (E).
3. Montrer que l'équation (E) est équivalente à l'équation (E') : $x^2 - 5x + 6 - \dfrac{5}{x} + \dfrac{1}{x^2} = 0$.
4. Calculer $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2$.
5. En posant $X = x + \dfrac{1}{x}$, montrer que l'équation (E') se ramène à une équation du second degré.
6. Résoudre l'équation du second degré, puis en déduire les solutions de l'équation (E).

3 Polynômes de degré 3

Exercice 17

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $x^3 = 9$
2. $x^3 - \frac{5}{2} = -\frac{4}{3}$

Exercice 18

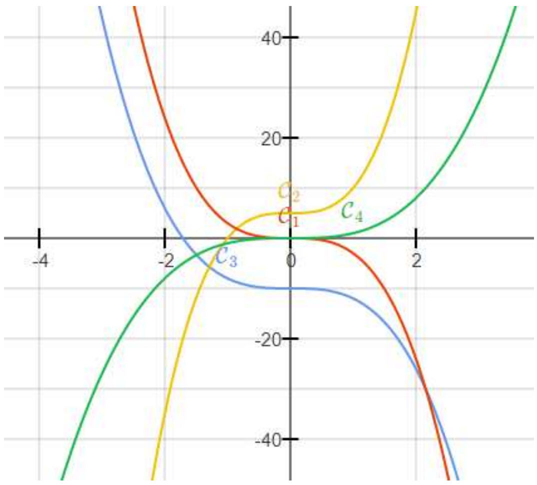
Donner le tableau de signe puis représenter dans un repère approprié les fonctions polynômes suivantes :

1. $h(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 8$
2. $p(x) = -x^3 - 4,5x^2 - \frac{5}{2}x$

Exercice 19

Déterminer la courbe représentative de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x) = -2x^3 - 10$
2. $g(x) = 5x^3 + 5$
3. $h(x) = -3x^3$
4. $k(x) = x^3$



Exercice 20

Soit P le polynôme défini par $P(x) = x^3 + 4x^2 - x - 4$. On cherche à résoudre l'équation $P(x) = 0$

1. Vérifier que 1 est solution de l'équation $P(x) = 0$.
2. Déterminer trois réels a, b et c tels que $P(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$.
3. Résoudre $P(x) > 0$.

Exercice 21

Dans $\mathbb{R}$, factoriser au maximum les polynômes suivants :

1. $P = X^3 + X - 2$
2. $Q = X^3 - 5X^2 + 8X - 4$
3. $R = 5X^3 + 3X^2 - 5X - 3$