1 Étude de série numériques

Exercice 1

Écrire les cinq premiers termes de chacune des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-(-1)^n}{n}$;
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$;
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$.

Exercice 2

En utilisant le théorème indiqué, déterminer si les séries numériques suivantes, dont le terme général est $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes ou divergentes :

1. $u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ (séries géométriques) ;
2. $u_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$ (séries géométriques) ;
3. $u_n = \frac{3}{n^3}$ (séries de Riemann) ;
4. $u_n = \frac{2\sqrt{n}}{n}$ (séries de Riemann) ;
5. $u_n = \frac{1}{n^2+3}$ (équivalence) ;
6. $u_n = \frac{5n}{n^2+1}$ (équivalence) ;
7. $u_n = \frac{n}{3^n}$ (règle de d'Alembert) ;
8. $u_n = \frac{3^n}{n^3}$ (règle de d'Alembert) ;
9. $u_n = \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$ (séries alternées) ;
10. $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$ (séries alternées) ;
11. $u_n = (-1)^n(n+1)$ (séries alternées).

Exercice 3

Étudier si les séries suivantes convergent ou divergent :

1. $u_n = \frac{1}{2n^2-1}$;
2. $u_n = \frac{2^2}{n!}$;
3. $u_n = \frac{n^2}{(2n)!}$;
4. $u_n = \frac{3n}{n^2-1}$;
5. $u_n = \frac{\sin^2 n}{3n^2}$;

Exercice 4

Démontrer que le suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \frac{3n+1}{5n^2-4}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = \frac{3}{5n}$ sont équivalentes.

Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Exercice 5

La série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n^2}$ est-elle absolument convergente ? convergente ?

Exercice 6

La série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n}$ est-elle absolument convergente ? convergente ?

Exercice 7 (Série télescopique.)

1. Trouver une suite simple équivalente à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \frac{1}{n^2+3n+2}$. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge.
2. Prouver que pour tout n, il existe deux réels A et B que l'on déterminera, tels que :
$$u_n = \frac{A}{n+1} + \frac{B}{n+2}$$
3. En déduire la somme de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

2 Série de Fourier

Exercice 8

Soit $k > 0$.

Soit f une fonction impaire de période π définie par $f(t) = \begin{cases} k & \text{pour } t \in [0; \frac{\pi}{2}[\\ -k & \text{pour } t \in [\frac{\pi}{2}; \pi[\end{cases}$

Cette fonction vérifie-t-elle les conditions de Dirichlet ?

Calculer ses coefficients de Fourier, et écrire sa série de Fourier.

Exercice 9 (*Signal "dents de scie"*)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, de période 2π, telle que : $f(t) = t \quad \text{si } t \in [-\pi; \pi[$ Soit a_n et b_n les coefficients de Fourier de cette fonction.

1. Représenter la fonction f sur l'intervalle $[-2\pi; 4\pi]$.
2. Justifier que, pour tout n, $a_n = 0$.
3. Prouver que pour tout entier $n > 0$, $b_n = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$.
4. Ecrire les cinq premiers termes de la série de Fourier associée à f.

Exercice 10 (« Redressement biphasé »)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = |\cos t|$.

Soit a_n et b_n les coefficients de Fourier de cette fonction.

1. Représenter la fonction f sur l'intervalle $[-2\pi; 4\pi]$.
2. Prouver que f est une fonction paire de période π.
3. Déterminer les valeurs des coefficients b_n.
4. Calculer la valeur moyenne de f sur une période.
5. Prouver que, pour $n > 0$, on a : $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\cos((2n+1)t) + \cos((2n-1)t)]$ En déduire que $a_n = \frac{4(-1)^n}{\pi(1-4n^2)}$.
6. Écrire les cinq premiers termes de la série de Fourier associée à f.

Exercice 11 (Quelques décompositions en séries de Fourier)

Déterminer les séries de Fourier (termes en sinus et cosinus) des fonctions suivantes :

1. La fonction $2\pi-$périodique, paire, définie par $f(x) = 1 - \frac{2x}{\pi}$ si $0 \leq x \leq \pi$.
2. La fonction créneau : f est 2π-périodique, définie par $f(x) = 1$ si $x \in [0, \pi[$, et $f(x) = -1$ si $x \in [-\pi, 0[$.
3. La fonction $2\pi-$périodique, définie par $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ si $x \in]-\pi, \pi]$.
   On rappelle que $\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$

Exercice 12 (Application aux calculs de séries)

Déterminer la série de Fourier de la fonction périodique de période 2π définie par $f(x) = x^2$ pour $-\pi \leq x \leq \pi$. En déduire la somme des séries $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$, $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$, $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4}$.

Exercice 13 (Termes impairs)

Déterminer la série de Fourier de la fonction $2\pi-$périodique définie sur $[-\pi, \pi]$ par $f(x) = |x|$. En déduire la valeur des sommes suivantes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}.$$

Exercice 14

Soit f la fonction périodique de période 2 vérifiant $f(x) = x - x^3$ pour tout $x \in]-1, 1]$.

1. Déterminer les coefficients de Fourier de f.
2. En déduire la somme de la série $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^3}$.

Exercice 15 (Dents de scie à front raide de valeur moyenne nulle.)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ de période 2π, telle que : $f(t) = t$ si $t \in [-\pi; +\pi[$.

Soit a_n et b_n les coefficients de Fourier de cette fonction. On reprend les résultats de l'exercice 9.

1. En appliquant la formule de Parseval, montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
2. Dessiner le spectre des fréquences de la fonction.

Exercice 16 (Dents de scie symétriques de valeur moyenne nulle)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, impaire et de période 4, telle que : $\begin{cases} f(t) &= t \text{ si } t \in [0; 1[; \\ f(t) &= -t + 2 \text{ si } t \in [1; 2[. \end{cases}$ Soit a_n et b_n les coefficients de Fourier de cette fonction.

1. Représenter la fonction f sur l'intervalle $]-2; 6]$.
2. Quelles sont les valeurs des coefficients a_n ?
3. Prouver que pour tout $n > 0$, $b_n = \dfrac{8}{n^2\pi^2} \sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$.
4. Écrire les cinq premiers termes de la série de Fourier associée à f.
5. (a) La série de Fourier associée à f converge-t-elle vers f ?
   (b) En calculant $f(1)$, prouver que : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.
6. Dessiner le spectre des fréquences de la fonction.

Exercice 17

On considère la fonction f, paire, de période 2π définie par :

$$\begin{cases} f(t) &= -t + \dfrac{\pi}{2} \text{ si } t \in [0; \dfrac{\pi}{2}[; \\ f(t) &= 0 \text{ si } t \in [\dfrac{\pi}{2}; \pi[. \end{cases}$$

1. Représenter la fonction f sur l'intervalle $]-2\pi; 4\pi]$.

2. Calculer la valeur moyenne de f sur une période.

3. Calculer les coefficients de Fourier de f.

   Suivant les valeurs de n, donner les valeurs possibles de a_n (présenter les résultats dans un tableau).

4. Dessiner le spectre des fréquences de la fonction.

5. Prouver que la série de Fourier associée à f converge vers f.

   On considère la série numérique

$$S = \frac{1}{1^2} + \frac{2}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{2}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{2}{10^2} + \frac{1}{11^2} + \cdots$$

   En étudiant $f(0)$, donner la valeur de cette série.

6. On considère la fonction $g(t) = \frac{\pi}{8} + \frac{2}{\pi}\cos(t) + \frac{1}{\pi}\cos(2t)$.

   (a) Montrer que g est paire, et de période 2π.

   (b) Prouver que $g'(t) = \frac{-2}{\pi}\sin t(1 + 2\cos t)$.

   (c) Dresser le tableau de variation de g sur l'intervalle $[0; \pi]$.

   (d) Dessiner les courbes représentatives des fonctions f et g sur l'intervalle $[0; 2\pi]$

Exercice 18

1. Soit n un entier naturel non nul.

   Cacluler à l'aide de deux intégrations par parties successives l'intégrale :

$$J = \int_0^\pi t(\pi - t)\cos(2nt)\mathrm{d}t.$$

2. On considère la fonction u définie sur $\mathbb{R}$, de période π, définie par :

$$u(t) = t(\pi - t) \text{ si } t \in [0; \pi[$$

   (a) Montrer que u est paire et tracer sa représentation graphique sur $[-2\pi; 2\pi]$.

   (b) Montrer que f satisfait aux conditions de Dirichlet.

   (c) Calculer ses coefficients de Fourier et en déduire que pour tout réel t :

$$u(t) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nt)}{n^2}$$

3. n est un entier naturel non nul, justifier la convergence des séries numériques de terme général :

$$\frac{1}{n^2} \quad ; \quad \frac{(-1)^n}{n^2} \quad ; \quad \frac{1}{n^4}$$

4. En utilisant le developpement de u en série de Fourier pour $t = 0$ et $t = \frac{\pi}{2}$, déterminer :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

5. La valeur efficace u_e de la fonction u est telle que $(u_e)^2 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} u^2(t)\mathrm{d}t$.
   Calculer u_e^2.
   La valeur efficace de la fonction u peut aussi s'exprimer à l'aide de la formule de Parseval :
   $$u_e^2 = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2.$$
   Soit P le nombre défini par $P = a_0^2 + \dfrac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2)$.
   Donner l'approximation de P à 10^{-3} par excès. Vérifier que $\dfrac{P}{u_e^2} > 0,999$.
6. En utilisant la formule de Parseval, calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

Exercice 19

1. Soit la fonction numérique g définie sur $[0;\pi]$ par
   $$g(t) = (1+\cos^2 t)\sin^2 t.$$
   (a) Montrer que $g'(t) = 4\sin t\cos^3 t$.
   (b) En déduire les variations de g sur $[0;\pi]$.
2. Soit la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$, paire, périodique de période 1 telle que :
   $$\left\{\begin{array}{lcll} f(t) & = & \frac{1}{2}-\tau & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \tau \\ f(t) & = & -\tau & \text{si } \tau \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \end{array}\right. \quad \text{où } \tau \text{ est un nombre réel tel que } 0<\tau<\frac{1}{2}$$
   (a) *Uniquement dans cette question, on prendra* $\tau = \dfrac{1}{6}$.
   Représenter la fonction f sur l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$ dans un repère orthonormal.
   (b) On admet que la fonction f satisfait aux conditions de Dirichlet.
   Soit S le développement en série de Fourier associé à la fonction f.
   Montrer que :
   $$S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\pi}\sin(2n\pi\tau)\cos(2n\pi t).$$
3. On décide de ne conserver que les harmoniques de rang inférieur ou égal à 2.
   Soit la fonction numérique h définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$h(t) = \frac{1}{\pi}\sin(2\pi\tau)\cos(2\pi t) + \frac{1}{2\pi}\sin(4\pi\tau)\cos(4\pi t)$$
   On désigne par E_h^2 le carré de la valeur efficace de h sur une période.
   (a) À l'aide de la formule de Parseval, déterminer E_h^2.
   (b) Montrer que $E_h^2 = \dfrac{1}{2\pi^2}\, g(2\pi\tau)$.
4. Déterminer la valeur de τ rendant E_h^2 maximal.

Exercice 20

On désigne par α un nombre réel positif tel que $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, paire, périodique de période 2π, telle que :
$$\left\{\begin{array}{lcrll} f(t) & = & 1 & \text{si} & 0 \leqslant t \leqslant \alpha \\ f(t) & = & 0 & \text{si} & \alpha < t < \pi-\alpha \\ f(t) & = & -1 & \text{si} & \pi-\alpha \leqslant t \leqslant \pi \end{array}\right.$$

1. **Dans cette question**, le nombre réel α vaut $\frac{\pi}{3}$.
   Dans un repère orthogonal, représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-2\pi\ ;\ 2\pi]$.

2. On appelle S la série de Fourier associée à la fonction f .
   On note $S(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt))$.
   Le but de cette question est de calculer les coefficients de la série de Fourier S pour une valeur x quelconque du nombre réel α tel que $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.
   (a) Calculer a_0, valeur moyenne de la fonction f sur une période.
   (b) Déterminer b_n, n désignant un nombre entier naturel strictement positif.
   (c) Montrer que, pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on a :
   $$a_n = \frac{2}{n\pi}\left[1 - (-1)^n\right] \sin(n\alpha).$$

3. Déterminer la valeur α_0 de α pour laquelle on $a_3 = 0$.

4. **Pour toute la suite de l'exercice**, on se place dans le cas où $\alpha = \frac{\pi}{3}$.
   Rappels :
   Si h désigne une fonction périodique de période T, le carré de la valeur efficace H de la fonction h sur une période est :
   $$H^2 = \frac{1}{T}\int_r^{r+T} [h(t)]^2 \,\mathrm{d}t.$$
   r désignant un nombre réel quelconque.
   (a) Calculer F^2, carré de la valeur efficace de la fonction f sur une période.
   (b) On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction g par :
   $$g(t) = a_0 + a_1\cos(t) + b_1 \sin t + a_2\cos(2t) + b_2\sin(2t).$$
   Montrer que $g(t) = \frac{2\sqrt{3}}{\pi}\cos(t)$ pour tout nombre réel t.
   (c) Calculer G^2, carré de la valeur efficace de la fonction g sur une période.
   (d) Donner une valeur approchée à 10^{-3} près du quotient $\frac{G^2}{F^2}$.
   Ce dernier résultat montre que la fonction g constitue une assez bonne approximation de la fonction f.

Exercice 21

Dans ce problème, on approche un signal à l'aide d'une fonction affine par morceaux.

On désigne par E un nombre réel de l'intervalle $]0\ ;\ 3[$.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, **paire**, périodique de **période 5**, telle que :

$$f(t) = \begin{cases} E \times t & \text{si} \quad 0 \leq t < 1 \\ (3-E)t + 2E - 3 & \text{si} \quad 1 \leq t < 2 \\ 3 & \text{si} \quad 2 \leq t \leq \frac{5}{2} \end{cases}$$

Dans cette **partie, et uniquement dans cette partie,** on se place dans le cas où $E = 2$.

1. Préciser l'écriture de $f(t)$ sur chacun des intervalles $[0\,;\,1[$, $[1\,;\,2[$ et $\left[2\,;\,\frac{5}{2}\right]$.
2. Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-5\,;\,10]$.

Dans cette **partie,** on se place dans le **cas général**, c'est-à-dire dans le cas où la valeur de E n'est pas spécifiée.

On appelle S la série de Fourier associée à la fonction f.

On note $S(t) = a_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{5}t\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi}{5}t\right)\right)$.

1. Montrer que la valeur moyenne de la fonction f sur une période est $a_0 = 2\dfrac{E+3}{5}$.
2. Déterminer b_n pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1.
3. (a) Montrer que pour tout nombre entier naturel n supérieur ou égal à 1 :

$$\int_0^1 t\cos\left(\frac{2n\pi}{5}t\right)\mathrm{d}t = \frac{5}{2n\pi}\sin\left(\frac{2n\pi}{5}\right) + \frac{25}{4n^2\pi^2}\left(\cos\left(\frac{2n\pi}{5}\right) - 1\right).$$

   (b) On a calculé les intégrales $\displaystyle\int_1^2 f(t)\cos\left(\frac{2n\pi}{5}t\right)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_2^{\frac{5}{2}} f(t)\cos\left(\frac{2n\pi}{5}t\right)\,\mathrm{d}t$.

   On a ainsi obtenu pour tout nombre entier naturel n supérieur ou égal à 1 :

$$\int_0^{\frac{5}{2}} f(t)\cos\left(\frac{2n\pi}{5}t\right)\,\mathrm{d}t = \frac{25}{4n^2\pi^2}\left((2E-3)\cos\left(\frac{2n\pi}{5}\right) + (3-E)\cos\left(\frac{4n\pi}{5}\right) - E\right).$$

   En déduire que pour tout nombre entier naturel supérieur ou égal à 1 :

$$a_n = \frac{5}{n^2\pi^2}\left((2E-3)\cos\left(\frac{2n\pi}{5}\right) + (3-E)\cos\left(\frac{4n\pi}{5}\right) - E\right).$$

4. Pour tout nombre entier naturel n supérieur ou égal à 1, on appelle u_n l'harmonique de rang n.
   On a alors $u_n(t) = a_n\cos\left(\dfrac{2n\pi}{5}t\right) + b_n\sin\left(\dfrac{2n\pi}{5}t\right)$ pour tout nombre réel t.
   (a) Montrer qu'au rang 5, $u_5(t)$ est nul pour tout nombre réel t.
   (b) On appelle E_0 la valeur de E pour laquelle l'harmonique de rang 3 est nulle, c'est-à-dire la valeur de E telle que $u_3(t)$ est nul pour tout nombre réel t.
   Déterminer la valeur exacte, puis une valeur approchée à 10^{-2} près, de E_0.

Dans ce problème, à l'aide d'un transformateur à diode, on approche un signal sinusoïdal redressé par une fonction affine par morceaux.

Un tel signal avec $u_3(t) = u_5(t) = 0$ *permettra :*

- *s'il est associé à un moteur, de réduire les à-coups du couple*
- *s'il est associé à un transformateur, d'éviter les pertes*
- *s'il est associé à un filtre, d'éliminer plus facilement les harmoniques de rang impair d'ordre supérieur.*