Sommaire

1 Calculer avec les nombres complexes

Exercice 1

Mettre sous la forme $a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ les nombres :

1. $(2+3i)+(-1+6i)$ 2. $(5+i)-(3-2i)$ 3. i^3 4. i^4 5. $(2-i)^2$
6. $(2-3i)(2+3i)$ 7. $(1+i)(3-2i)$ 8. $(4+i)(-5+3i)$ 9. $\dfrac{1}{i}$ 10. $\dfrac{1}{\sqrt{3}+2i}$

Exercice 2

On considère $j = -\frac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$. Écrire j^2 et j^3 sous forme algébrique et calculer $J = j + j^2 + j^3$.

Exercice 3

Écrire sous forme algébrique les nombres complexes :

1. $\dfrac{3+6i}{3-4i}$ 2. $\left(\dfrac{1+i}{2-i}\right)^2 + \dfrac{3+6i}{3-4i}$ 3. $\dfrac{2+5i}{1-i} + \dfrac{2-5i}{1+i}$ 4. $\dfrac{1+4i}{1-\sqrt{2}i}$ 5. $(x+iy)(x'+iy')$ 6. $(x+iy)^2$
7. $\left(2+i\sqrt{3}\right)\left(5-i\right) + \left(\dfrac{1}{2}+3i\right)^2$
8. Exprimer en fonction de $n \in \mathbb{Z}$, $z_n = i^n$

Exercice 4

Soit $z_1 = -1 + 2i$ et $z_2 = 1 - i$. Écrire sous forme algébrique les nombres complexes :

(1) $z_1^2 - 2z_2$ **(2)** $z_1 z_2^2$ **(3)** $\dfrac{z_1}{z_2}$ **(4)** $\dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2}$ **(5)** $\dfrac{1}{z_1^2} + \dfrac{1}{z_2^2}$

Exercice 5

Soit les nombres complexes : $z_1 = \dfrac{3-i}{5+7i}$ et $z_2 = \dfrac{3+i}{5-7i}$.

Vérifier que $z_1 = \overline{z_2}$, et en déduire que $z_1 + z_2$ est réel et que $z_1 - z_2$ est imaginaire pur.

Calculer $z_1 + z_2$ et $z_1 - z_2$.

Exercice 6

Effectuer les calculs suivants :

1. $(3+2i)(1-3i)$ $\dfrac{3+2i}{1-3i}$.
2. Produit du nombre complexe de module 2 et d'argument $\pi/3$ par le nombre complexe de module 3 et d'argument $-5\pi/6$.
3. Quotient du nombre complexe de module 2 et d'argument $\pi/3$ par le nombre complexe de module 3 et d'argument $-5\pi/6$.

Exercice 7

On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = 1+i$, $z_B = 4+5i$, $z_C = 8+2i$

Déterminer l'affixe du point D tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.

2 Représentation géométrique d'un nombre complexe

Exercice 8

1. Placer dans le plan les points A, B, C, D et E d'affixes respectives :

   (a) $z_A = -1+i$ (b) $z_B = 2+i$ (c) $z_C = -3$ (d) $z_D = 3-i$ (e) $z_E = 2i$

2. Déterminer l'affixe des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CE}$.

Exercice 9

1. Déterminer les affixes des points de coordonnées suivantes :

   (a) $F(1\,;1)$ (b) $G(2\,;0)$ (c) $H(-3\,;1)$ (d) $I(0\,;1)$

2. Déterminer l'affixe des vecteurs $\overrightarrow{FH}$ et $\overrightarrow{IF}$.

Exercice 10

Les points A, B et C ont pour affixe respective $-2+i$, $3+3i$, $1+\frac{11}{5}i$.

1. Calculer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. En déduire que les points A, B et C sont alignés.
3. Placer les points A, B et C.

3 Module d'un nombre complexe

Exercice 11

Calculer le module des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = 7$ 2. $z_2 = -4$ 3. $z_3 = -1+2i$ 4. $z_4 = -7i$ 5. $z_5 = \sqrt{3}+i$ 6. $z_6 = \dfrac{-1+i}{3}$

Exercice 12

Calculer le module des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = \sqrt{2}+i\sqrt{6}$ 2. $z_2 = i(1+i)$ 3. $z_3 = (4+3i)(12-5i)$ 4. $z_4 = \dfrac{1}{i+3}$ 5. $z_5 = (1-7i)^3$
6. $z_6 = \dfrac{i-\sqrt{8}}{5+3i}$

Exercice 13

On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = -1 + 2i$, $z_B = 2 + 5i$, $z_C = 2 - i$.

1. Représenter, dans le plan complexe, les points A, B et C.
2. Calculer AB, AC et BC.
3. Que peut-on dire du triangle ABC ?

Exercice 14

Pour chacun des cas suivants, représenter, dans le plan complexe, les points M dont les affixes z respectent la condition donnée :

1. $|z| = 5$
2. $|z - 3| = 2$
3. $|z - i| = 5$
4. $|z - 6i| = 5$

Exercice 15

Soit z un nombre complexe. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $|z^n| = |z|^n$.

Exercice 16

Soient z et z' deux nombres complexes de module 1.

1. Démontrer que $|z \times z'| = 1$.
2. Démontrer que $\left|\dfrac{1}{z}\right| = 1$.

Exercice 17

On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = 1 + i$, $z_B = 4 + 5i$, $z_C = 8 + 2i$.

Calculer la longueur AB. Le point C appartient-il au cercle de centre A passant par B ?

Exercice 18

Placer les points A, B et C d'affixe respectif : $z_A = -1 - 2i$, $z_B = 4 - i$ et $z_C = \sqrt{2} + \frac{3}{2}i$.

Déterminer les longueurs OA, OB et OC et AB.

4 Argument d'un nombre complexe

Exercice 19

Calculer un argument de chacun des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = 5$
2. $z_2 = -4$
3. $z_3 = \sqrt{2}i$
4. $z_4 = -7i$

Exercice 20

Pour chacun des cas suivants, représenter, dans le plan complexe, les points M dont les affixes z respectent la condition donnée :

1. $\arg(z) = \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$
2. $\arg(z) = -\pi\ [2\pi]$
3. $\arg(z) = \dfrac{5\pi}{6}\ [2\pi]$
4. $\arg(z) = \dfrac{-\pi}{4}\ [2\pi]$

Exercice 21

1. Exprimer $\arg(\overline{z})$ en fonction de $arg(z)$.

2. Exprimer $\arg(-z)$ en fonction de $arg(z)$.

3. Exprimer $\arg(-\overline{z})$ en fonction de $arg(z)$.

Exercice 22 (Savoir utiliser les propriètés des arguments)

1. Déterminer un argument de $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = -3 + \sqrt{3}i$.

2. En déduire un argument des nombres suivants :
   1. $z_1 \times z_2$ 2. $-3 - \sqrt{3}i$ 3. $-\frac{1}{2}(1+i)$ 4. $-1 - i$ 5. $\dfrac{(3-\sqrt{3}i)^2}{(1-i)^3}$

Exercice 23

On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = -2 + i$, $z_B = 3 + 3i$, $z_C = 1 + \dfrac{11i}{5}$.
Montrer que les points A, B et C sont alignés.

Exercice 24

Les points A, B et C ont pour affixe respective $1 + \dfrac{1}{2}i$, $\dfrac{3}{2} + 2i$ et $-1 - \dfrac{11}{2}i$.
Montrer que les points A, B et C sont alignés.

Exercice 25

Soit j le nombre complexe dont le carré vaut -1 (notation des physiciens en électricité pour ne pas confondre avec l'intensité d'un courant). L, R, C, ω sont des nombres réels.
Soit $Z_1 = \dfrac{jL\omega}{R + \frac{j}{C\omega}}$ et $\dfrac{1}{Z_2} = \dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{jL\omega} + jC\omega$
Déterminer la forme algébrique des nombres complexes Z_1 et Z_2. Préciser le module et un argument de Z_1.

5 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Exercice 26

Écrire sous la forme $a + ib$ les nombres complexes suivants :

1. Nombre de module 2 et d'argument $\pi/3$.
2. Nombre de module 3 et d'argument $-\pi/8$.

Exercice 27

Écrire, sous forme trigonométrique, les nombres complexes suivants :

1. $z_1 = 7$ 2. $z_2 = -5$ 3. $z_3 = 5i$ 4. $z_4 = 1 + i\sqrt{3}$ 5. $z_5 = -2 - 2i$ 6. $z_6 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{i}{2}$

Exercice 28

Écrire, sous forme trigonométrique, les nombres complexes suivants :

1. $z_1 = 1 - i\sqrt{3}$
2. $z_2 = -2 + 2\sqrt{3}i$
3. $z_3 = \dfrac{1}{3} - \dfrac{i}{3}$

Exercice 29

Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = 2(\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2}))$
2. $z_2 = 5(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3}))$
3. $z_3 = \cos(\pi) + i\sin(\pi)$
4. $z_4 = 4(\cos(\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{6}))$

Exercice 30

On considère les nombres complexes : $z = \dfrac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ et $z' = 1 - i$

1. Déterminer le module, un argument de z, de z' et de $\dfrac{z}{z'}$.
2. Déterminer la forme algébrique de $\dfrac{z}{z'}$.
3. En déduire que : $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Exercice 31

Calculer le module et un argument des complexes suivants, puis les écrire sous formes trigonométrique :

$z_1 = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2(1+i)}$ $z_2 = \frac{5(-1+i)}{\sqrt{3}+i}$

Exercice 32

Calculer le module et l'argument de $u = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $v = 1 - i$. En déduire le module et l'argument de $w = \frac{u}{v}$.

Exercice 33

a Écrire sous forme trigonométrique les complexes $z_1 = \sqrt{3} - i$, $z_2 = 1 - i$, et $Z = \frac{z_1}{z_2}$.

b Déterminer la forme algébrique de Z, et en déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 34

Écrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

1. $z_1 = 3$
2. $z_2 = -4$
3. $z_3 = 2i$
4. $z_4 = -1 + i$
5. $z_5 = -\sqrt{3} + i$
6. $z_6 = -17$
7. $z_7 = -6\sqrt{3} + 6i$
8. $z_8 = 5i$
9. $z_9 = \sqrt{6} + i\sqrt{2}$

6 Forme exponentielle d'un nombre complexe

Exercice 35

Placer dans le plan complexe et écrire sous formes trigonométrique et algébrique les nombres complexes :

1. $3e^{-i\frac{\pi}{2}}$
2. $\sqrt{2}e^{3i\frac{\pi}{4}}$
3. $6e^{-i\frac{2\pi}{3}}$
4. $5e^{i\frac{5\pi}{3}}$
5. $2e^{i\frac{\pi}{4}}\, e^{-i\frac{3\pi}{2}}$
6. $\dfrac{3e^{i\frac{\pi}{6}}}{2e^{-i\frac{2\pi}{3}}}$

Exercice 36

Écrire sous forme trigonométrique et exponentielle les nombres complexes :

1. 5
2. $4 + 4i$
3. $\dfrac{3}{2}i$
4. $\dfrac{2}{1-i}$
5. $\sqrt{3} - i$
6. $\left(\sqrt{3} - i\right)^2$
7. $\left(\sqrt{3} - i\right)^3$

Exercice 37

En utilisant la notation exponentielle complexe, retrouver en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$ les valeurs de :
Exprimer sous forme algébrique les nombres complexes :

(1) $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ **(3)** $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ **(5)** $\cos(x+\pi)$ **(7)** $\cos(\pi-x)$

(2) $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ **(4)** $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ **(6)** $\sin(x+\pi)$ **(8)**$\sin(\pi-x)$

Exercice 38

On donne $z_1 = e^{i\frac{\pi}{6}}$, $z_2 = 3e^{-i\frac{\pi}{3}}$, et $z_3 = \sqrt{2}e^{-i\frac{5\pi}{6}}$.
Donner sous la forme exponentielle puis algébrique les complexes : $z_1z_2z_3$, $\dfrac{z_1}{z_2z_3}$, z_2^2, z_3^6.

Exercice 39

Soit θ et θ' deux réels quelconques. En exprimant de deux manières différentes le complexe $e^{i\theta}e^{i\theta'}$, exprimer $\cos(\theta+\theta')$ et $\sin(\theta+\theta')$ en fonction des cosinus et sinus de θ et θ'.
Exprimer de la même façon $\sin(2\theta)$ et $\cos(2\theta)$.

Exercice 40

Soit α et β deux nombres réels tels que $\alpha+\beta \neq \pi + 2k\pi$ (avec $k \in \mathbb{Z}$).
Démontrer que $m = \dfrac{e^{i\alpha}+e^{i\beta}}{1+e^{i\alpha}e^{i\beta}}$ est un nombre réel (commencer par factoriser le numérateur par $e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$)

Exercice 41

Simplifier l'expression, où $\theta \in \mathbb{R}$, $\left(\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^2$. Était-ce prévisible sans calcul ?

Exercice 42

1. x est un nombre réel. Écrire la forme algébrique et la forme exponentielle de $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)e^{ix}$.
2. Utiliser la question précédente pour résoudre dans $]-\pi;\pi[$ l'équation $\sqrt{3}\cos(x)-\sin(x)=\sqrt{3}$.

Exercice 43

Écrire le nombre complexe $(\sqrt{3}-i)^{10}$ sous forme algébrique.

Exercice 44

Soit p et q deux nombres réels.

1. Factoriser $e^{i\frac{p+q}{2}}$ dans la somme $e^{ip}+e^{iq}$.
2. Factoriser $e^{i\frac{p+q}{2}}$ dans la somme $e^{ip}-e^{iq}$.
3. En déduire une factorisation de $\cos(p)+\cos(q)$ et de $\sin(p)+\sin(q)$.
4. Résoudre dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$ l'équation : $\cos(x)+\cos(3x)=0$.
5. Calculer $A = e^{i\frac{\pi}{4}}+e^{i\frac{\pi}{7}}$ puis $B = e^{i\frac{\pi}{3}}-e^{i\frac{\pi}{5}}$

7 Formules d'Euler et de De Moivre

Exercice 45 (Addition)

Exprimer $\cos(5x)$ et $\sin(5x)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.

Exercice 46 (Linéariser !)

Linéariser $\cos^5 x$, $\sin^5 x$ et $\cos^2 x \sin^3 x$

Exercice 47

En utilisant la formule d'Euler, linéariser les expressions suivantes :

1. $A(x) = \cos^3(x)$ 2. $B(x) = \sin^3(x)$ 3. $C(x) = \cos^5\left(\frac{x}{2}\right)$ 4. $D(x) = \cos^3(x)\sin^3(x)$

Exercice 48 (Forme exponentielle et formule d'Euler)

Soient $a, b \in]0, \pi[$. Écrire sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

1. $z_1 = 1 + e^{ia}$ 2. $z_2 = 1 - e^{ia}$ 3. $z_3 = e^{ia} + e^{ib}$ 4. $z_4 = \dfrac{1 + e^{ia}}{1 + e^{ib}}$

8 Lignes de niveau

Exercice 49

Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que :

1. $\arg(z) = \frac{\pi}{6}$
2. $|z - 3| = |z + 2i|$
3. $|z + 1 - 2i| < \sqrt{5}$
4. $\left|\overline{z} + \frac{i}{2}\right| = 4$
5. $\arg(z + i) = \pi$
6. $\arg\left(\frac{1}{iz}\right) = \pi$
7. $\arg\left(\frac{z+1}{z-2i}\right) = \frac{\pi}{2}$

Exercice 50

Déterminer par le calcul et géométriquement les nombres complexes z tels que $\left|\frac{z-3}{z-5}\right| = 1$.

Généraliser pour $\left|\frac{z-a}{z-b}\right| = 1$.

Exercice 51

Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que :

1. $\left|\dfrac{z-3}{z-5}\right| = 2$
2. $\left|\dfrac{z-3}{z-5}\right| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice 52 (Lieu géométrique et arguments)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Déterminer l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie la relation demandée :

1. $\arg(z - 2) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$
2. $\arg(z - 2) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$
3. $\arg(iz) = \frac{\pi}{4}\ [\pi]$
4. $\arg\left(\frac{z}{1+i}\right) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$
5. $\arg\left(\frac{z-2i}{z-1+i}\right) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$

Exercice 53

1. Déterminer l'équation du cercle de rayon 3 et de centre $\Omega(3+2i)$.
2. Quel est l'ensemble des point $M(x;y)$ tels que $x^2+y^2-6x+4y-12=0$.
3. Quel est l'ensemble des point $M(x;y)$ tels que $x^2+y^2+4x-2y+11=0$.

Exercice 54

Quel est l'ensemble des points $M(z)$ du plan complexe, tels que $\dfrac{z-2}{z+i}$ soit un nombre imaginaire pur ?

Exercice 55

Soit z un nombre complexe différent de i. Montrer que : $\left|\dfrac{z+i}{z-i}\right|=1 \iff z\in\mathbb{R}$.

Exercice 56

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

1. $|z-6i|=3$
2. $|z+3-2i|<2$
3. $|z+2|=|z-3i+1|$
4. $|2-iz|=|z+5|$
5. $\left|\dfrac{z+2i}{z+1-2i}\right|>1$

9 Racines carrées, équation du second degré

Exercice 57

Calculer les racines carrées de $1,\ i,\ 3+4i,\ 8-6i$, et $7+24i$.

Exercice 58

Trouver les racines carrées de $3-4i$ et de $24-10i$.

Exercice 59

1. Calculer les racines carrées de $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$. En déduire les valeurs de $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$.
2. Calculer les valeurs de $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$.

Exercice 60

Montrer que les solutions de $az^2+bz+c=0$ avec a, b, c réels, sont réelles ou conjuguées.

Exercice 61

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2+9z-4=0$
2. $-z^2+(1+\sqrt{3})z-\sqrt{3}=0$

Exercice 62

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2+z+1=0$
2. $z^2-(1+2i)z+i-1=0$
3. $z^2-\sqrt{3}z-i=0$
4. $z^2-(5-14i)z-2(5i+12)=0$
5. $z^2-(3+4i)z-1+5i=0$
6. $4z^2-2z+1=0$
7. $z^4+10z^2+169=0$
8. $z^4+2z^2+4=0$

Exercice 63

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2-(11-5i)z+24-27i=0$.
2. $z^3+3z-2i=0$.

Exercice 64

Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^3=\frac{1}{4}(-1+i)$. Montrer qu'une seule des solutions a une puissance quatrième réelle.

Exercice 65

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^4+4z^2-21=0$.

Exercice 66

On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z)=z^4-4z^3+4z^2-4z+3$.

a) Montrer qu'il existe un polynôme Q à coefficients réels tel que, pour tout $z\in\mathbb{C}$, $P(z)=(z^2+1)Q(z)$.

b) En déduire toutes les racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme P.

Exercice 67

Soit P le polynôme défini par : $P(z)=z^3-(2+i)z^2+2(1+i)z-2i$.

1. Calculer $P(i)$.
2. Trouver deux nombres réels p et q tels que $P(z)=(z-i)(z^2+pz+q)$.
3. Déterminer alors toutes les racines du polynôme P.

Exercice 68

Soit le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par : $P(z)=3z^3+(1+6i)z^2+2(8+i)z+32i$.

1. Vérifier que $z_0=-2i$ est une racine de P.
2. En déduire une factorisation de P, et déterminer alors toutes les racines de P.

Exercice 69

On considère l'équation du second degré (E) : $z^2+(1+i\sqrt{3})z-1=0$.

a) Déterminer le discriminant Δ de cette équation. Écrire Δ sous forme exponentielle.

b) Donner un nombre complexe δ tel que $\delta^2=\Delta$. Écrire δ sous forme algébrique.

c) Vérifier que les formules usuelles du second degré, $z_1=\dfrac{-b-\delta}{2a}$ et son conjugué $z_2=\overline{z_1}$ donnent bien deux solutions de (E).

Exercice 70

On considère l'équation $z^2 - 2\cos(\theta)z + 1 = 0$, où θ est un réel donné dans $[0; 2\pi[$.

a) Vérifier que le discriminant de cette équation est $\Delta = -4\sin^2(\theta)$.

b) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation proposée, en discutant suivant les valeurs de θ, en donnant les solutions sous formes exponentielle.

Exercice 71

Écrire sous forme exponentielle les solutions de : $z^2 - 2z\sin^2\alpha + \sin^2\alpha = 0$.

Exercice 72

a Donner sous forme exponentielle les solutions de l'équation : $z^2 + z + 1 = 0$.

b Soit α un réel donné. Factoriser l'expression : $z^2 - e^{2i\alpha}$.

c En déduire les solutions de l'équation : $z^4 + z^2 + 1 = 0$.

10 Problèmes

Exercice 73

Dans le plan complexe, A, B et C sont les points d'affixes : $z_A = 1 + i$, $z_B = 4 + 5i$, $z_C = 5 - 2i$

1. Montrer que $AB = AC$, puis que $\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$.
2. Déterminer l'affixe du point K tel que le quadrilatère $ABKC$ soit un rectangle.
3. (a) Déterminer l'affixe du point G tel que le quadrilatère $AGBC$ soit un parallélogramme.

   (b) Vérifier que B est le milieu du segment $[GK]$.

Exercice 74

Soit les points A, B, C et D dans le plan complexe d'affixe $z_A = 3 + i$, $z_B = 2 - 2i$, $z_C = 2i$ et $z_D = 1 + 5i$. Faire une figure puis montrer de deux façons différentes que $ABCD$ est un parallélogramme.

Exercice 75

Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par : $P(z) = z^3 + z^2 - 4z + 6$.

1. Montrer que pour tout complexe z, $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$.
2. Vérifier que $1 + i$ est une racine de P, et en déduire une autre racine complexe de P.

Exercice 76

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 3 + i$, $z_B = -\sqrt{3} + 3i$ et $z_C = \dfrac{4\sqrt{3}z_B}{9z_A}$

1. Démontrer que OAB est un triangle rectangle.
2. Démontrer que le point C est le centre de gravité de ce triangle.

Exercice 77

1. Soit A, B, C trois points du plan complexe dont les affixes sont respectivement a, b, c. On suppose que $a + jb + j^2c = 0$; montrer que ABC est un triangle équilatéral (j et j^2 sont les racines cubiques complexes de 1 — plus précisément $j = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$). Réciproque ?

2. ABC étant un triangle équilatéral direct du plan complexe, on construit les triangles équilatéraux directs BOD et OCE, ce qui détermine les points D et E (O est l'origine du plan complexe). Quelle est la nature du quadrilatère $ADOE$? Comparer les triangles OBC, DBA et EAC.

Exercice 78 (Avec la formule du binôme)

Simplifier les nombres complexes suivants : $(1+i)^5$, $(1-i)^4$.