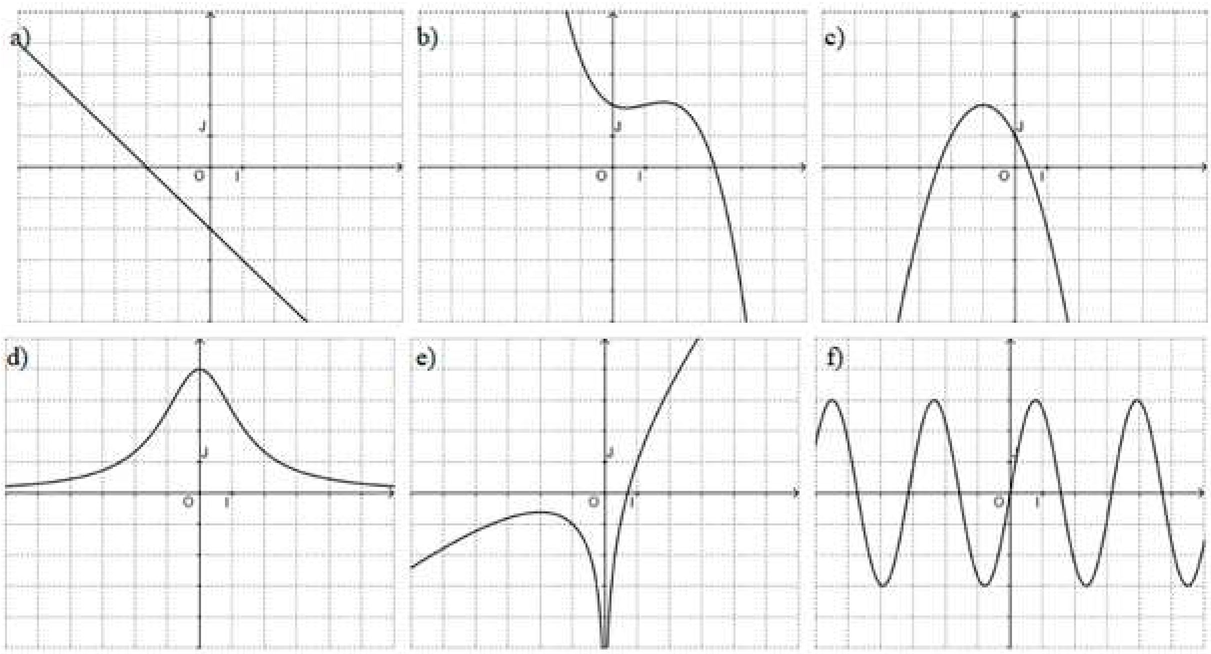
Sommaire

1 Lecture graphique de limites

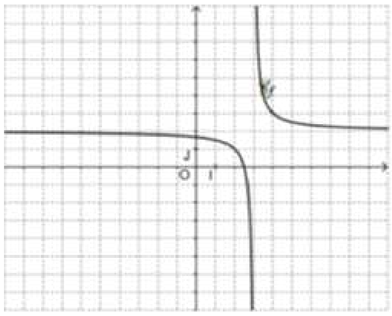
Exercice 1

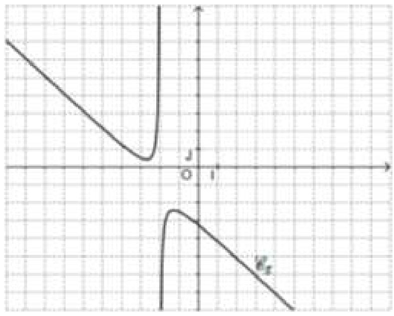
Dans chacun des cas suivants, on donne la représentation graphique d'une fonction f. Conjecturer la limite en $-\infty$, en $+\infty$ et en 0 de la fonction f.



Exercice 2

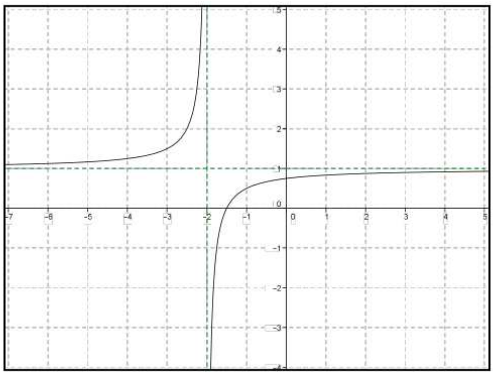
On donne ci-dessous les représentations graphiques $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ des fonctions f et g. Déterminer graphiquement l'ensemble de définition de chacune d'elles puis les limites aux bornes de leur ensemble de définition.





Exercice 3

On a tracé la courbe représentative $\mathcal{C}'$ d'une fonction f dans un repère orthonormé.



1. Lire sur le graphique la limite de la fonction :
   (a) en $+\infty$ puis en $-\infty$
   (b) en -2 à droite puis à gauche
2. Citer les asymptotes à $\mathcal{C}'$ en donnant leur équation.

Exercice 4

Dans chacun des cas, on donne le tableau de variations d'une fonction f.

À l'aide de ce tableau, déterminer l'ensemble de définition, les limites aux bornes de cet ensemble et si c'est possible les équations des asymptotes.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Variations de f	2	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
Variations de g	$-\infty$	↗	2	↘	0	↗	1

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
Variations de h	2	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	4	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$

Exercice 5

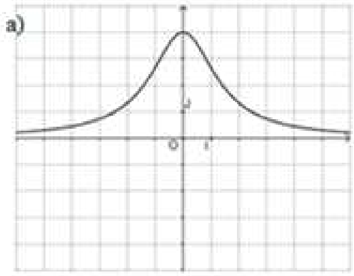
Que peut-on dire des limites suivantes concernant les asymptotes horizontales ou verticales ?

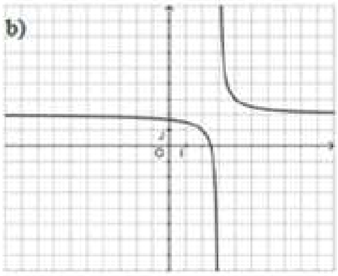
1. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -3$
2. $\lim_{\substack{x\to 3 \\ x>3}} f(x) = -\infty$
3. $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$
4. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

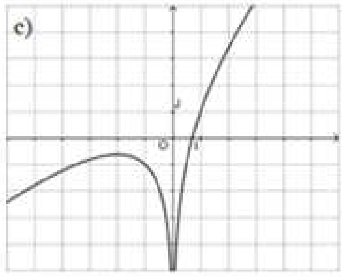
Exercice 6

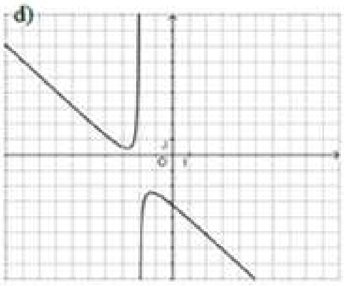
Dans les cas suivants, on donne la courbe représentative ou le tableau de variations d'une fonction f.

La courbe repésentative admet-elle des asymptotes ? Si oui, préciser leurs équations.

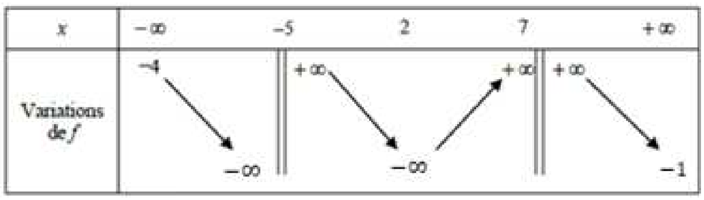








e)



2 Limite des fonctions références

Exercice 7

Dans chacun des cas suivants, donner les limites aux bornes de l'ensemble sur lequel la fonction est définie :

1. f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^7$
2. f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^{2022}$
3. f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^{17}$
4. f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -\frac{1}{3}x^{18}$
5. f définie sur $]-\infty;0[$ par : $f(x) = \frac{1}{x^5}$
6. f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{2}{x^2}$
7. f définie sur $]-\infty;0[$ par : $f(x) = -\frac{6}{x^5}$
8. f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = -\frac{1}{3x^3}$

Exercice 8

Dans chacun des cas suivants, donner les limites aux bornes de l'ensemble sur lequel la fonction est définie :

1. f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \ln(x)$
2. f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{3x}$
3. f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x+1}$
4. f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x^2+1}{4}$

Exercice 9

Déterminer les limites dans les cas suivants :

1. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{1}{x-1}$
2. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{1}{x-1}$
3. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \dfrac{-3x}{2x-4}$
4. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \dfrac{-3x}{2x-4}$
5. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \dfrac{2x+1}{3x-6}$
6. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \dfrac{2x+1}{3x-6}$
7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}$
8. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{(x-1)^2}$
9. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{-3}{(x-2)^2}$
10. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Traduire les résultats précédents en termes d'asymptotes.

Exercice 10

Étudier la limite de la fonction an a :

1. $f(x) = \dfrac{-3}{(6-2x)^2}$ en $a = 3$
2. $f(x) = \dfrac{1}{(e^x-1)^2}$ en $a = 0$
3. $f(x) = \cos(x)$ en $a = \dfrac{\pi}{4}$
4. $f(x) = \sin(x - \dfrac{\pi}{6})$ en $a = \dfrac{\pi}{3}$
5. $f(x) = ln(x+2)$ en $a = -1$

3 Opérations sur les limites

Exercice 11

Déterminer les limites suivantes en $+\infty$ et $-\infty$ en détaillant et en justifiant les propriétés utilisées (somme, produit ou quotient) :

1. $f(x) = 2x^2 + 3$
2. $f(x) = 2x + 4 - \dfrac{1}{x}$
3. $f(x) = 3e^x + 4x$
4. $f(x) = \dfrac{2}{x+3}$
5. $f(x) = -3x + \dfrac{1}{e^x}$
6. $f(x) = (2x-1)(3+2x)$
7. $f(x) = (e^x-4)(e^x+1)$
8. $f(x) = \dfrac{2}{x^2+4}$
9. $f(x) = (x+1)(e^x+3)$
10. $f(x) = x\sqrt{x}$ en $+\infty$ seulement
11. $f(x) = -3ln(x)$ en $+\infty$ seulement

Exercice 12

Déterminer les limites suivantes en détaillant et en justifiant les propriétés utilisées (somme, produit ou quotient) :

1. $\lim\limits_{x\to -\infty} x^3 + \dfrac{1}{x} + 2$
2. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} + \sqrt{x} - 2$
3. $\lim\limits_{x\to -\infty} (x^3+1)\left(\dfrac{1}{x} - 2\right)$
4. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-6 + \frac{1}{x}}{4x-2}$
5. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \dfrac{x^2-10}{x-2}$
6. $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} \dfrac{1}{x-3}$
7. $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} \dfrac{1}{x-3}$
8. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{-2x+5}{x^2-4x+3}$
9. $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} \dfrac{-2x+5}{x^2-4x+3}$
10. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} -3ln(x)$
11. $\lim\limits_{x\to +\infty} -\dfrac{1}{3}ln(x)$

4 Formes indéterminée

Exercice 13

Déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de la fonction f. (Pensez à factoriser)

1. $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$
2. $f(x) = -x^2 + 3x + 4$
3. $f(x) = -4x^3 + 2x^2 + 10$
4. $f(x) = -4x^2 + 5x + 4$

Exercice 14

Déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de la fonction f. (Pensez à factoriser)

1. $f(x) = \dfrac{2x+5}{x+1}$
2. $f(x) = \dfrac{x^2+4}{x^2+2}$
3. $f(x) = \dfrac{x^2+3}{2x-5}$
4. $f(x) = \dfrac{x+6}{3x^2+4}$

Exercice 15

Déterminer les limites en $+\infty$, $-\infty$ et en 1 des fonctions suivantes :

1. $f(x) = -6x^2 + 2x^3 + 1$
2. $f(x) = x^4 - 2x^3 + x + 1$
3. $f(x) = \dfrac{-3x^2+x+2}{x^2-x-2}$
4. $f(x) = \dfrac{x^3-4x^5+2x+1}{7x^5+4x^2-6}$
5. $f(x) = \dfrac{2x^2-7x+12}{x-2}$
6. $f(x) = \dfrac{3x-5}{3+2x-x^2}$

Exercice 16

Dans chacun des cas suivants, déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définitionde la fonction :

1. $f(x) = -x^2 + x\sqrt{x}$ sur $[0; +\infty[$
2. $f(x) = (1-2\sqrt{x})(1-3x)$ sur $[0; +\infty[$
3. $f(x) = (7x+3)^2(5x+9)$ sur $\mathbb{R}$
4. $f(x) = x^3 + \dfrac{1}{x^5}$ sur $]0; +\infty[$
5. $f(x) = \dfrac{-3}{x^2-4}$ sur $]-2; 2[$
6. $f(x) = 4 + \dfrac{3}{x}$ sur $]-\infty; 0[$
7. $f(x) = \sqrt{x^2-x}$ sur $]1; +\infty[$
8. $\dfrac{x}{2} - 3\sqrt{x}$ sur $]0; +\infty[$

Exercice 17

Déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de la fonction f. (Pensez à factoriser)

1. $f(x) = \dfrac{e^x+4}{3e^x-5}$
2. $f(x) = \dfrac{4e^x}{(e^x+2)^2}$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^3+1)\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2}\right)$
4. $f(x) = x^2 - \sqrt{x}$ en $+\infty$ seulement
5. $f(x) = \dfrac{1}{x}(\sqrt{x}+3)$ en $+\infty$ seulement

Exercice 18

Étudier les asymptotes des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{2x-1}{4x+3}$
2. $f(x) = \dfrac{2e^x+1}{e^x-1}$

5 Composition

Exercice 19

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \sqrt{x^2+4}$:

1. Déterminer la limite en $+\infty$
2. Peut-on conclure par des théorèmes d'opérations quand x tend vers $-\infty$?
3. Montrer que pour tout x réel, $f(x) = \dfrac{-4}{x - \sqrt{x^2+4}}$
4. En déduire la limite en $-\infty$

Exercice 20

Déterminer la limite de la fonction f en a :

1. $f(x) = \sqrt{2x+5}$; $a = +\infty$
2. $f(x) = e^{-3x+4}$; $a = +\infty$; $a = -\infty$
3. $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$; $a = -\infty$
4. $f(x) = e^{4x} - 2x$; $a = -\infty$
5. $f(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{3}{x}}$; $a = +\infty$; $a = -\infty$; $a = 0^+$
6. $f(x) = e^{-x^2+5x}$; $a = +\infty$; $a = -\infty$
7. $f(x) = 2x + e^{-x}$; $a = +\infty$
8. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$; $a = 0^+$; $a = 0^-$
9. $f(x) = ln(-x)$; $a = 0^-$; $a = -\infty$
10. $f(x) = -0,1ln(-x+10)$; $a = 10^-$; $a = -\infty$

6 Comparaison

Exercice 21

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(t) = e^{-t} \times \cos(2t + \frac{\pi}{3})$:

1. Justifier que pour tout $t \geq 0$, $-e^{-t} \leq f(t) \leq e^{-t}$
2. En déduire la limite en $+\infty$?
3. Illustrer graphiquement ce résultat

Exercice 22

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = (1 + 2\cos^2(x))e^{1-x}$:

1. Montrer que pour tout réels x, $e^{1-x} \leq f(x) \leq 3e^{1-x}$
2. En déduire la limite en $+\infty$ et en $-\infty$?
3. Quelle interprétation géométrique en faites-vous ?

Exercice 23

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = t + \cos t$:

1. Justifier que $x - 1 \leq f(x) \leq x + 1$
2. Déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$
3. Peut-on traduire ces résultats en terme d'asymptotes ?

Exercice 24

Déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$:

1. $f(x) = x^2 + x \sin x$
2. $f(x) = \dfrac{\cos x}{x + \cos x}$
3. $f(x) = \dfrac{x \sin x}{x^2 + 2\cos x}$

7 Problèmes

Exercice 25

On considère f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{-3}{x^2 + x + 2}$:

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 + x - 2 = 0$
2. En déduire le domaine de définition de f.
3. Étudier les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
4. En déduire l'existence éventuelle d'asymptotes à la courbe représentative de la fonction f.

Exercice 26

On considère f la fonction définie sur $[3; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{-6x^2 - x + 5}{3x + 2}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$
2. Vérifier que pour tout x de $[3; +\infty[$, $f(x) = -2x + 1 + \dfrac{3}{3x + 2}$
3. Démontrer que $\mathcal{C}_f$ admet une asympotte oblique Δ dont on précisera l'équation.
4. Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à Δ.

Exercice 27

On considère la fonction g définie sur $]-\infty; -1[$ par $g(x) = \dfrac{2x^2 - 1}{(x + 1)^2}$

1. Montrer que la courbe représentative $\mathcal{C}_g$ de la fonction g, admet une asymptote verticale D et une asymptote horizontale Δ dont on précisera les équations.
2. Étudier le signe de $g(x) - 2$ sur $]-\infty; -1[$.
3. En déduire la position relative de $\mathcal{C}_g$ par rapport à D.

8 Continuité

Exercice 28

Les fonctions suivantes sont-elles continues sur leur ensemble de définition ? Justifier vos réponses.

1. $f(x) = x - 6,5$
2. $f(x) - 4x^2 + 3x - 5$
3. $f(x) = \cos x - x^2 + 5x$
4. $f(x) = -5\sin(x) + 4\cos(x) - e^{-x} + 5x^7$
5. $f(x) = \tan(x)e^x - 7x\cos(x)$
6. $f(x) = \dfrac{5x+1}{x^2 - 4x + 3}$
7. $f(x) = \dfrac{\tan(x)e^x}{7x\cos(x)}$

Exercice 29

Étudier la continuité des fonctions suivantes :

1. $f_0 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ f_0(x) = \begin{cases} x^2 \text{ si } x \leq 0 \\ x \text{ si } x > 0 \end{cases}$
2. $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ f_1(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$
3. $f_2 : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f_2(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \text{ si } x > 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}$
4. $f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ f_3(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + 3 \text{ si } x \leq -1 \\ \dfrac{2}{x^2+1} \text{ si } x > -1 \end{cases}$
5. $f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ f_4(x) = \begin{cases} x^2 - 3 \text{ si } x \in]-\infty; 1[\\ f(1) = -2 \\ \sqrt{x-1} - 2 \text{ si } x \in]1; +\infty[\end{cases}$

8.1 Théorème des valeurs intermédiaires

Exercice 30

Soit le tableau de variations d'une fonction f : Justifier que $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
f	-3	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	4

Exercice 31

Soit f la fonction définie sur $I = [0;1]$ par $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 3$

1. Montrer que f est croissante sur I
2. Justifier que l'équation $f(x) = 4$ admet une unique solution α.
3. Déterminer α par balayage (avec votre calculatrice) à 10^{-1} près

Exercice 32

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 - 3x - 2$

1. Justifier la continuité de f sur $[-1;0]$
2. Montrer que f est strictement décroissante sur $[-1;0]$
3. Justifier que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution $\alpha \in [-1;0]$.
4. Déterminer α par balayage (avec votre calculatrice) à 10^{-1} près

Exercice 33

1. Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}^{*+}$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 2 + \ln(x)$
   (a) Calculez $f(1)$ et $f(3)$.
   (b) Que peut-on déduire de l'équation $f(x) = 0$?
2. Soit g la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x$
   Justifier que l'équation $f(x) = 1$ admet une solution $\alpha \in [-1;1]$.

Exercice 34

Soit f la fonction définie sur $I = [0;1]$ par : $f(x) = 1,4x(1-x)$.

1. Justifier que f est continue sur I.
2. Justifier que l'équation $f(x) = x$ possède une solution sur I (autre que 0).
   Résoudre cette équation dans I.
3. Montrer que la fonction f est croissante sur $[0;0,5]$.
4. On définit la suite (u_n) telle que $u_0 = 0,1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq u_n \leq u_{n+1} < 0,5$. On verra un peu plus tard que tout suite croissante majorée converge. Appelons l sa limite.
5. Déterminer l.

Exercice 35

Soit f la fonction définie sur $I = \mathbb{R} \setminus -2$ par : $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+2}$.

1. Justifier que f est continue sur I.
2. Justifier que l'équation $f(x) = x$ possède une solution sur I. Résoudre cette équation dans I.
3. On définit la suite (u_n) telle que $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
4. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq u_n \leq u_{n+1} < 1$. On verra un peu plus tard que tout suite croissante majorée converge. Appelons l sa limite.
5. Déterminer l.