Exercice 1

f, g et h les fonctions définies sur les intervalles I suivants : $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{3}{2} \qquad I = [0;3]$

$g(x) = x + \sqrt{x^2+1} \qquad I = [1;+\infty[$

$h(x) = x^2 + 4x + 3 \qquad I = [-2;+\infty[$ puis $I =]-\infty;-2]$

1. Démontrer que ces trois fonctions réalisent une bijection de I sur un intervalle à déterminer.
2. Déterminer leur fonction réciproque (ensemble de définition et expression).

Exercice 2

Pour chacune des fonctions réciproque trigonométrique.

1. En démontrer l'existence
2. Déterminer son ensemble de définition, son ensemble de dérivabilité et sa fonction dérivée.
3. Étudier les variations et représenter la fonction.

Exercice 3

Calculer $\arccos\left(\cos\frac{2\pi}{3}\right)$, $\quad \arccos\left(\cos\frac{-2\pi}{3}\right)$, $\quad \arccos\left(\cos\frac{4\pi}{3}\right)$.

Exercice 4

1. Déterminer la valeur de $\arcsin(-1/2)$, $\arccos(-\sqrt{2}/2)$ et $\arctan(\sqrt{3})$.
2. Simplifier les expressions suivantes : $\tan(\arcsin x)$, $\quad \sin(\arccos x)$, $\quad \cos(\arctan x)$.

Exercice 5

Étudier la fonction f définie sur $[-1;1]$ par $f(x) = \arcsin(x) - \arccos(x)$.

On précisera la valeur de x pour laquelle on a $f(x) = 0$.

Exercice 6

Déterminer les ensembles de définition et de dérivabilité des fonctions suivantes et calculer leur dérivée :

1. $f(x) = \arcsin(3x)$
2. $g(x) = \arccos\left(\dfrac{x}{2}\right)$
3. $h(x) = \arctan\left(\sqrt{x}\right)$

Exercice 7

1. Démontrer que pour tout $x \in [-1;1]$, on a : $\arccos(x) + \arcsin(x) = \dfrac{\pi}{2}$
2. Étudier la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{\arcsin(x)}{\arccos(x)}$ (on commencera par préciser son ensemble de définition)

Exercice 8

Calculer les deux intégrales suivantes : $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{2}{1+t^2}\,dt$ et $J = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$

Exercice 9

En utilisant l'intégration par partie, calculer : $I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin(t)\,dt$

Exercice 10

En utilisant le changement de variable proposé, calculer :

1. $K = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t^2(1+t^2)^2}\,dt$ en posant $u = \dfrac{1}{t}$
2. $L = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x+2)\sqrt{x+1}}\,dx$ en posant $u = \sqrt{x+1}$
3. $M = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{3+\cos(2x)}\,dx$ en posant $u = \cos(x)$
4. $N = \displaystyle\int_0^2 \frac{8x-1}{x^2-2x+2}\,dx$ en posant $t = x-1$

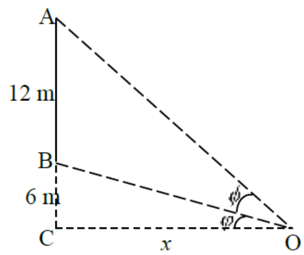
Exercice 11

1. Étudier la fonction $x \mapsto \dfrac{3x}{2+x^2}$ définie sur $\mathbb{R}$.
2. On considère la fonction f définie par : $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{3x}{2+x^2}\right)$.
   a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .
   b) Étudier la parité de la fonction f.
   c) Étudier les variations de la fonction f.

Exercice 12

Le bord inférieur d'un panneau publicitaire de 12 m de haut est situé à 6 m au-dessus des yeux d'un observateur. La figure ci-après présente une vue de profil :

Le panneau publicitaire est le segment $[AB]$ et les yeux de l'observateur sont en O. On considère que l'observateur obtient la meilleure vision du panneau lorsque l'angle ϕ sous lequel il le voit est maximal.
Le but de l'exercice est de calculer la position de l'observateur afin que sa vision du panneau publicitaire soit la meilleure possible.



φ et ϕ sont des réels de l'intervalle $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$, mesurés en radians ; x est un réel positif mesuré en mètres. On rappelle que pour tous réels a et b différents de $\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ et tels que $a+b \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi$, on a : $\tan(a-b) = \dfrac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$(1).

1. a) Exprimer $\tan(\varphi)$ et $\tan(\varphi+\phi)$ en fonction de x.
   b) En utilisant la relation (1), démontrer que : $\phi = \arctan\left(\dfrac{12x}{x^2+108}\right)$
2. On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \arctan\left(\dfrac{12x}{x^2+108}\right)$
   a) Calculer la limite de f en 0 et en $+\infty$.
   b) Étudier les variations de la fonction f et préciser la valeur exacte de son maximum.
   c) Donner la distance OC qui donne à l'observateur la meilleure vision possible du panneau publicitaire et préciser l'angle sous lequel l'observateur voit le panneau.
3. Question subsidiaire : démontrer l'égalité (1)

Exercice 13

Calculer, sur leur domaine de dérivabilité, les dérivées des fonctions à valeur complexe suivantes :

1. $f(x) = \cos(x) + i\sin(x)$
2. $g(x) = e^{ax}(\cos(x) + i\sin(x))$
3. $h(x) = 6x^3 + 4 - i(5x^2 - 4x)$
4. $j(x) = \tan(x) + i\arctan(x)$

Exercice 14

Pour chacune des fonctions suivantes, donner sa dérivée :

1. $f(x) = (\cos(x) + i)(\sin(x) - i)$
2. $g(x) = e^{2ix}\cos(x)$
3. $h(x) = \dfrac{1-ix}{1+ix}$
4. $j(x) = \dfrac{2}{3+ix}$

Exercice 15

Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos(x)\, dx$