Le logiciel **Xcas** est un logiciel de calcul formel. Il permet entre autre de résoudre les équations différentielles qui sont proposées en exercice.

Téléchargement sur http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/irem.html

Attention à ne pas abuser de ce logiciels durant les exercices d'entrainement. Il doit vous aider à vérifier vos calculs, mais en aucun cas il ne doit servir à les faire à votre place.

Consulter le lien ci-dessous pour connaître la syntaxe des instructions sur Xcas :

http://mathsp.tuxfamily.org/spip.php?article168

Autres références :

- Le site https://mathdf.com/dif/fr/

- Le site https://www.dcode.fr/solveur-equation-differentielle

Sommaire

1 Équation différentielle linéaire du premier ordre

1.1 EDL homogène du premier ordre

Exercice 1

Résoudre les équations homogènes :

a) $y' + y = 0$ b) $y' - 3y = 0$ c) $y' = 2y$ d) $3y' = y$ e) $y' = \frac{y}{5}$

Exercice 2

Résoudre (ou primitiver) chacune des équations différentielles suivantes :

1. $2f'(t) - 3f(t) = 0$ (sur $\mathbb{R}$)
2. $y'(t) + 5y(t) = 0$ (sur $\mathbb{R}$)
3. $y'(t) - \frac{2}{t}y(t) = 0$ (sur $\mathbb{R}^{+*}$)
4. $tv' + (1-t)v = 0$ (sur $\mathbb{R}^{+*}$)
5. $(1+t^2)y' + ty = 0$ (sur $\mathbb{R}$)
6. $tx' - x = 0$ (sur $\mathbb{R}^{+*}$)
7. $(\sin t)x' + (\cos t)x = 0$ sur $I =]0;\pi[$
8. $(t-1)x' + x = 0$ sur $I =]0;1[$

1.2 EDL du premier ordre avec second membre

Exercice 3

Donner les solutions des équations différentielles :

a) $y' + 2y = 6$ b) $y' - 3y = 9$ c) $y' + 2y = 5$ d) $2y' + 3y = -7$ e) $y' = -\frac{y}{4} + 2$

Exercice 4

Résoudre chacune des équations différentielles suivantes (on cherchera une solution particulière sous la forme indiquée) :

1. $x'(t) + 3x(t) = 4\sin t + \cos t$ (sous la forme $A\cos t + B\sin t$).
2. $x'(t) - 5x(t) = t$ (sous la forme $At + B$).
3. $x'(t) - 4x(t) = 2\mathrm{e}^{3t}$ (sous la forme $k\mathrm{e}^{3t}$).

1.3 EDL du premier ordre avec condition initiale

Exercice 5

On considère l'équation différentielle $3y' + 2y = 0 \quad (E)$

1. Résolvez (E) et tracez plusieurs solutions sur l'écran de votre calculatrice ou de Géogebra.
2. Résolvez cette même équation sachant maintenant que $y(0) = 32$.

Exercice 6

Soit (E) l'équation différentielle $2y' + y = 2$.

1. Résoudre (E).
2. Déterminer la solution de (E) qui vérifie $y(0) = 1$.

Exercice 7

Résoudre l'équation $y' + 3y = 12$. Déterminer la fonction solution qui vérifie de plus $y(0) = 1$.

Exercice 8

Résoudre l'équation différentielle $2y' + y = 0$. Déterminer la solution f de cette équation vérifiant $f(\ln 4) = 1$.

Exercice 9

Soit (E) $(1 + t^2)x = t(1 - t^2)x'$.

1. Trouver A, B et C tels que $\dfrac{1 + t^2}{t(t^2 - 1)} = \dfrac{A}{t} + \dfrac{B}{t - 1} + \dfrac{C}{1 + t}$.
2. Résoudre (E) sur $]1; +\infty[$
3. Trouver la solution particulière x_1 telle que $x_1(2) = -\dfrac{2}{3}$.

1.4 Problèmes avec EDLO1

Exercice 10 (Écoulement d'un liquide dans un tube cylindrique)

Une comparaison à un modèle d'écoulement amène à considérer que la vitesse d'écoulement v_0 d'un liquide dans un tube cylindrique est solution de l'équation différentielle : $\quad 4v'(x) + v(x) = 3e^{\frac{x}{2}} - 1 \quad (E)$
avec la condition initiale $v_0(0) = 0$.

1. Résoudre l'équation différentielle $4v'(x) + v(x) = 0$.
2. Déterminer les constantes réelles A et B pour que la fonction u telle que $u(x) = Ae^{\frac{x}{2}} + B$ soit une solution particulière de l'équation différentielle (E).
3. Résoudre l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution particulière v_0 de l'équation différentielle (E) vérifiant $v_0(0) = 0$.

Exercice 11 (Le bon polynôme)

Soit (E) l'équation différentielle $\quad y'(x) - y(x) = x^2 - x - 1$
dans laquelle y est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ de la variable réelle x et y' sa fonction dérivée.

1. Déterminer une solution particulière de (E) sous forme d'un polynôme de degré 2.
2. Trouver la solution générale de l'équation (E).
3. Quelle est la solution de (E) vérifiant la condition $y(0) = 1$?

Exercice 12

Soit (E) l'équation différentielle $\quad 2x'(t) + 3x(t) = 6t^2 - 7t - 7$
où l'inconnue x est une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et où x' est la dérivée de x.

1. Résoudre l'équation différentielle (E).
2. Déterminer la solution particulière f de l'équation (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 0$.

Exercice 13

Soit $(E) : y'(x) - y(x) = x^2$.

1. Résoudre (E)
2. Trouver la solution f de (E) vérifiant $f(0) = 0$.
3. Étudier f sur $\mathbb{R}^+$ et tracer sa représentation graphique. (On pourra étudier rapidement les variations de la fonction $g : x \mapsto e^x - (x+1)$ pour trouver le signe de f' sur $\mathbb{R}^+$.)

Exercice 14 (La vitesse d'un marteau)

Une machine à compacter est constituée d'un bloc d'acier appelé marteau. Ce marteau se déplace le long d'une tige placée verticalement.

L'étude physique montre que la vitesse v (exprimée en mètres/seconde) est une fonction du temps t (exprimé en secondes) solution de l'équation différentielle $\quad v'(t) + v(t) = 5 + 5e^{-t} \quad (E)$

où v est une fonction de la variable t, définie et dérivable sur $[0; +\infty[$ et v' sa fonction dérivée.

1. Résoudre $v'(t) + v(t) = 0$.
2. Déterminer une solution particulière de (E) de la forme $v_0(t) = a + bte^{-t}$ où a et b sont deux nombres réels à déterminer.
3. (a) Résoudre (E).

   (b) En déduire $v(t)$ en supposant que $v(0) = 0$.
4. Calculer la valeur exacte de la distance parcourue entre les instants $t = 0$ et $t = 2$, c'est à dire
$$\int_0^2 \left[(5t-5)e^{-t} + 5\right] \mathrm{d}t.$$
   Donner, en mètres, une valeur approchée de cette longueur au centième près.

Exercice 15 (Partie A. Résolution d'une équation différentielle)

On considère l'équation différentielle $(E) : y' + y = x$ où y est une fonction de la variable x définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et y' la fonction dérivée de y.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E_0) : y' + y = 0$.
2. Rechercher une fonction affine solution particulière de (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E).
4. Déterminer la fonction f solution de (E) telle que $f(0) = 1$.

Partie B. Étude de la solution.

On étudie la fonction f trouvée ci-dessus, définie sur l'intervalle $[-1; +\infty[$ par $f(x) = 2e^{-x} + x - 1$.

1. Calculer la dérivée f' de f. Étudier son signe et dresser le tableau de variation de f.
2. Déterminer la limite $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (x-1)$.

   On note Δ la droite d'équation $y = x - 1$. Interpréter graphiquement le résultat précédent, puis tracer Δ et l'allure de la courbe représentative de f.

Exercice 16 (Problème d'isolation.)

Pour tester la résistance d'une plaque d'isolation phonique à la chaleur, on porte sa température à 100°C et on étudie l'évolution de sa température en fonction du temps.

On note $\theta(t)$ la température de la plaque, en degré Celsius, à l'instant t, en minutes.

La température ambiante est de 19°C et après 6 minutes la température est redescendue à 82°C.

On admet que la fonction θ est solution de l'équation différentielle (E) : $y' + 0,042y = 0,798$.

Partie A.

1. Rechercher une fonction constante solution particulière de (E).

   Donner alors l'ensemble des solutions de l'équation (E).

2. D'après l'énoncé, que vaut $\theta(0)$, la température initiale de la plaque.

   En déduire la solution particulière de (E) donnant la température de la plaque en fonction du temps.

Partie B.

1. Calculer la température de la plaque après 35 minutes.
2. Calculer la dérivée θ' de θ. En déduire le sens de variation de θ sur $[0; +\infty[$.
3. Calculer la limite de $\theta(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.
4. Représenter graphiquement la fonction θ.
5. Calculer le temps à partir duquel la température de la plaque est inférieure à 30°C. Vérifier graphiquement ce résultat.

Exercice 17 (Décharge de condensateur)

Les unités de mesure utilisées sont les unités S.I.
Un condensateur de capacité C est chargé sous une tension initiale de 20 volts. Il se décharge ensuite dans un résistor de résistance R ; on note $a = RC$.
La tension aux bornes du condensateur est une fonction V du temps t définie sur $[0, +\infty[$.
On admet que V est une fonction dérivable solution de l'équation différentielle :

$$V'(t) + \frac{1}{a}V(t) = 0. \quad (E)$$

1. (a) Déterminer toutes les fonctions solutions de l'équation différentielle (E).

   (b) On rappelle que pour $t = 0$ on a $V(0) = 20$. Déterminer l'expression de V.

2. Dans cette question, on suppose que $R = 1000$ et $C = 10^{-4}$.

   (a) Montrer que l'on a alors $V(t) = 20e^{-10t}$.

   (b) Étudier les variations de la fonction V.

   (c) Déterminer les valeurs de t pour lesquelles $V(t) \geq 0,02$.

   (d) L'intensité traversant le circuit est une fonction I du temps ; on a $I(t) = CV'(t)$. Déterminer $I(t)$.

(e) Calculer l'énergie W dissipée dans le résistor entre les instants $t = 0$ et $t = 0,69$ sachant que

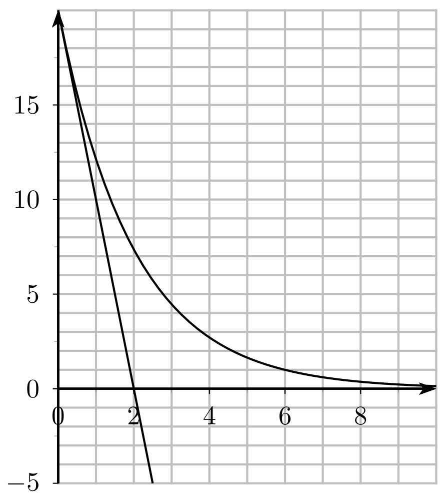
$$W = \int_0^{0.69} RI^2(t)\mathrm{d}t.$$

3. Dans cette question, la tension aux bornes étant définie par $V(t) = 20e^{-\frac{t}{a}}$, on note C_a la courbe représentative de V dans un repère orthogonal avec les unités graphiques 5 cm sur l'axe des abscisses pour 0,l seconde et 0,5 cm sur l'axe des ordonnées pour représenter 1 volt.

   (a) Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe C_a au point d'abscisse 0.

   (b) Soit M le point d'intersection de T avec l'axe des abscisses. Déterminer l'abscisse de M.

   (c) Pour un certain dipôle on a tracé la courbe représentative $\mathcal{C}$, ainsi que sa tangente au point d'abscisse 0 sur le graphique ci-dessous. Déduire de ce graphique la valeur correspondante de a.



Exercice 18

On considère l'équation $\quad (E) : y' - 2y = 0.$

On note f la solution de (E) vérifiant $f(0) = 1$ et g la solution de (E) vérifiant $g(0) = 2$.

1. Déterminer les expressions de f et g.
2. Donner les tableaux de variations de f et g, puis tracer dans un repère les courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
3. Sur le graphique, tracer la droite Δ d'équation $y = 2$.

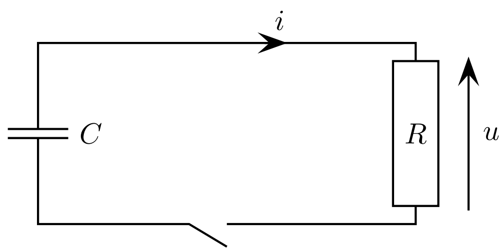
   On note A et B les points d'intersection de Δ avec $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.

   a Déterminer les coordonnées des points A et B.

   b Tracer sur le graphique les tangentes à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ en A et B.

   Déterminer les coefficients directeurs de ces deux tangentes.

Exercice 19



Un condensateur de capacité C, initialement chargé à une tension $u_0 = 10$ volts, se décharge à partir de l'instant $t_0 = 0$ à travers un circuit de résistance R.

La tension u est une fonction du temps t, en secondes, et vérifie l'équation différentielle $(E) : RCu'(t) + u(t) = 0$.

On prend $C = 15.10^{-5}$ farads et $R = 2.10^4$ ohms.

1. Écrire l'équation différentielle (E) vérifée par la tension u et la résoudre.

2. Déterminer la fonction u solution de (E) et telle que $u(t_0) = u_0$.

3. À partir de quel instant t_1 la tension devient-elle inférieure au dixième de sa valeur initiale ?

   On donnera la valeur exacte, puis une valeur approchée au dixième de seconde de t_1.

4. Calculer la valeur moyenne de u entre les instants t_0 et t_1.

5. L'énergie emmagasinée dans le condensateur à l'instant t est, en joules, $W(t) = \dfrac{1}{2}C\,[u(t)]^2$.

   Calculer la valeur moyenne W_m de cette fonction entre t_0 et t_1.

Exercice 20

A **Résolution de l'équation différentielle**

On considère l'équation $(E) : y' + 0,01y = 24$,

où y est une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur $[0; +\infty[$.

(a) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (E).

(b) Déterminer la solution v de l'équation (E) qui vérifie la condition initiale $v(0) = 0$.

B **Étude d'une fonction**

Soit v la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $v(t) = 2400\left(1 - e^{-0,01t}\right)$.

(a) Déterminer $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t)$.

(b) Déterminer la fonction dérivée v' de v.

En déduire le sens de variation de v

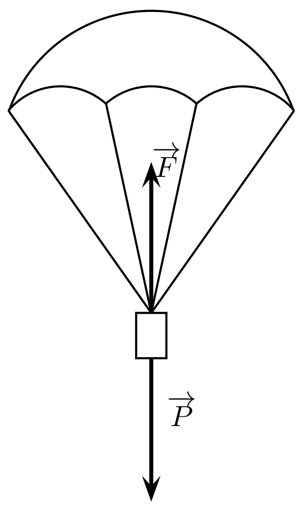
(c) Résoudre l'équation $v(t) = 1200$. Donner la valeur exacte puis approchée arrondie à 10^{-1}.

Exercice 21

La vitesse d'un objet soumis à son poids et aux frottements de l'air vérifie l'équation

$$(E) : \; v'(t) + 140v(t) = 10$$

où la fonction vitesse v, exprimée en $m.s^{-1}$, est définie et dérivable sur $[0; +\infty[$.



1. Résoudre l'équation différentielle (E).

2. Déterminer la solution v de (E) qui s'annule pour $t = 0$.

3. Étudier la limite de v lorsque t tend vers $+\infty$. Interpréter ce résultat.

4. À quel instant t_1 la bille atteint-elle 95% de sa vitesse limite ?

   À quel instant t_2 en atteint-elle 99% ?

Exercice 22 (Méthode de variation de la constante)

En utilisant la méthode de la variation de la constante, résoudre chacune des équations différentielles suivantes puis préciser pour chaque solution sur quel domaine elle est valable.

1. $x'(t) - x(t) = \dfrac{e^{2t}}{1+e^t}$
2. $tx'(t) - x(t) = \sqrt{t}$
3. $(t^2+1)x'(t) + 2tx(t) = 3t^2$
4. $y'(x)\cos x - y(x)\sin x = 2x - 1$

Exercice 23

En utilisant la méthode de la variation de la constante, résoudre chacune des équations différentielles suivantes puis préciser pour chaque solution sur quel domaine elle est valable.

1. $ty'(t) - y(t) = t^2\mathrm{e}^t$
2. $xy' + y = \dfrac{1}{1+x^2}$ (difficile, on se rappellera qu'une primitive de $\dfrac{1}{1+x^2}$ est $\arctan(x)$)
3. $xy' + (x-1)y = x^2$
4. $(x+1)^3y' + 2y(x+1)^2 = 1$

Exercice 24 (Méthode de la variation de la constante)

Le but de cet exercice est la résolution de l'équation différentielle (E) : $\quad x(x^2+1)y' - 2y = x^3(x-1)^2e^{-x}$,
où y représente une fonction de la variable réelle x, dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et où y' est la dérivée de y.

1. (a) Déterminer les trois nombres réels a, b, c tels que pour tout réel x de l'intervalle $]0,+\infty[$:
$$\frac{2}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}.$$
   (b) En déduire une primitive sur l'intervalle $]0,+\infty[$ de la fonction : $\quad x \mapsto \frac{2}{x(x^2+1)}$.
   (c) Résoudre sur l'intervalle $]0,+\infty[$ l'équation différentielle (E_1) : $\quad x(x^2+1)y' - 2y = 0$.
   (d) Pourquoi a-t-on préciser l'intervalle $]0,+\infty[$?
2. On se propose de déterminer une fonction g dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$ telle que la fonction :
$$h : x \mapsto \frac{x^2}{x^2+1}g(x)$$
soit une solution particulière de l'équation (E).
   (a) Calculer $h'(x)$ en fonction de $g(x)$ et $g'(x)$.
   (b) Montrer que $h(x)$ est solution de (E) si et seulement si $\quad g'(x) = (x-1)^2e^{-x}$.
   (c) Déterminer les nombres réels α, β, γ tels que la fonction $x \mapsto (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)e^{-x}$ soit une primitive sur l'intervalle $]0,+\infty[$ de la fonction : $\quad x \mapsto (x-1)^2e^{-x}$.
3. En déduire une solution particulière de l'équation (E) puis la solution générale de cette équation.

2 Équation différentielle du second ordre

2.1 Équations différentielles d'oscillateurs harmoniques libres

Exercice 25

Résoudre les équations différentielles :

a) $y'' + 16y = 0$ b) $9y'' + y = 0$ c) $4y'' + 25y = 0$ d) $y'' + 5y = 0$ e) $2y'' = -5y$

Exercice 26

Déterminer les fonctions solutions de l'équation différentielle (E) : $y'' + 4y = 0$.

Exercice 27

Soit (E) l'équation différentielle $y'' + 16y = 0$.

1. Résoudre (E).
2. Déterminer la solution f de (E) vérifiant $f(0) = \frac{1}{10}$ et $f'(0) = -\frac{2\sqrt{3}}{5}$

Exercice 28

On considère l'équation différentielle (E) : $4y'' + \pi^2 y = 0$.

1. Résoudre (E).
2. On sait de plus que la courbe représentative de la fonction g solution de (E) :

   a Passe par le point $A\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

   b Possède une tangente en A parallèle à l'axe des abscisses.

   Déterminer g et tracer l'allure de sa courbe représentative.

Exercice 29

Résoudre l'équation différentielle (E) : $4y'' + 9y = 0$, puis déterminer sa solution f qui vérifie les conditions $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$ et $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}$.

Exercice 30

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + \frac{1}{9}y = 0$ où y est une fonction de la variable réelle t.

1. Résoudre (E).
2. Déterminer la solution de (E) vérifiant les conditions initiales $f(0) = \sqrt{3}$ et $f'(0) = \frac{1}{3}$.
3. Vérifier que, pour tout nombre réel t, $f(t) = 2\sin\left(\frac{1}{3}t + \frac{\pi}{3}\right)$.

Exercice 31

1. Résoudre l'équation différentielle $y'' + 16y = 0$.
2. Déterminer la solution f de cette équation vérifiant $f(0) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $f'(0) = 2$.
3. On rappelle que, pour tout réel a et b, $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$.
   Vérifier que, pour tout réel x, $f(x) = \sin\left(4x + \dfrac{\pi}{3}\right)$.
4. Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$.

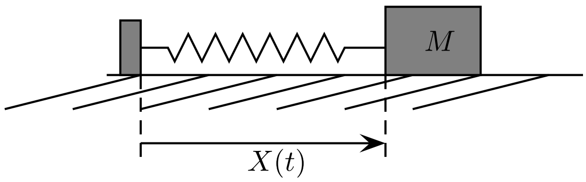
Exercice 32 (Objet retenu par un ressort.)

On fixe à l'extrémité d'un ressort horizontal un objet qui peut coulisser sans frottement sur un plan.

On repère l'objet par sa position X qui varie en fonction du temps t.

On admet que la fonction X est solution de l'équation

$(E) : X'' + 100X = 0$.



1. Résoudre l'équation différentielle (E).
2. Déterminer la solution de l'équation (E) telle que $X(0) = 10^{-1}$ et $X'(0) = 0$.
3. Vérifier que l'énergie mécanique W du système, définie pour tout nombre réel $t \in [0; +\infty[$ par $W(t) = 10^{-1}\,[X'(t)]^2 + 10\,[X(t)]^2$, est constante.
4. Déterminer la valeur moyenne de la fonction X sur l'intervalle $\left[0; \dfrac{\pi}{10}\right[$.

2.2 EDL homogène du deuxième ordre

Exercice 33

Vérifier que la fonction définie par $y(t) = e^{2t}\cos(3t)$ est une solution de l'équation (E_0) : $y'' - 4y' + 13y = 0$.

Exercice 34

Déterminer les fonctions solutions de l'équation différentielle $(E) : y'' - 4y' + 3y = 0$.

Exercice 35

Déterminer les fonctions solutions de l'équation différentielle $(E) : y'' + 2y' + 2y = 0$.

Exercice 36

Résoudre chacune des équations différentielles suivantes :

1. $x'' - 6x' + 8x = 0$
2. $x'' - 6x' + 9x = 0$
3. $x'' - 4x' + 20x = 0$

2.3 EDL homogène du deuxième ordre avec condition initiale

Exercice 37

En physique, l'étude d'un mouvement amorti conduit à l'équation différentielle

$$x''(t) + 2x'(t) + 2x(t) = 0 \quad (E)$$

dans laquelle x désigne une fonction numérique de la variable t, admettant des dérivées première et seconde notées respectivement $x'(t)$ et $x''(t)$.

1. Résoudre cette équation sur $\mathbb{R}$.
2. Trouver la solution particulière de cette équation prenant la valeur 0 pour $t = 0$ et dont la dérivée prend la valeur 1 pour $t = 0$.
3. Soit f la fonction numérique, telle que, pour tout élément t de l'intervalle $[0, \pi]$,

$$f(t) = e^{-t} \sin t.$$

   (a) Justifer le signe de f sur l'intervalle $[0; \pi]$

   (b) Tracer à la calculatrice la représentation graphique C de f.

4. On se propose de calculer, en cm^2 une valeur approchée par défaut à 1 mm^2 près de l'aire du domaine plan délimité par la courbe C et l'axe des abscisses. À cette fin, deux méthodes sont proposées :

   (a) Déterminer l'intégrale $\int_0^\pi f(t)\mathrm{d}t$ au moyen de deux intégrations par parties successives.

   (b) En utilisant l'équation différentielle (E) écrite sous la forme

$$x = -\frac{1}{2}(x'' + 2x'),$$

   Déterminer une primitive F de f sur $[0, \pi]$.

   En déduire l'expression de $\int_0^\pi f(t)\mathrm{d}t$ à l'aide de F.

   (c) Déterminer une valeur approchée de l'aire considérée à 1 mm^2 près par défaut.

Exercice 38 (Oscillations libres et amorties dans un fluide visqueux.)

L'écart à sa position initiale d'un objet dans un fluide visqueux est une fonction du temps solution de l'équation différentielle

$$(E) : \frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 2y = 0$$

1. Résoudre l'équation différentielle (E).
2. Déterminer la solution particulière de (E) qui s'annule pour $t = 0$ et dont la dérivée vaut 4 pour $t = 0$.

Exercice 39 (Oscillations forcées et amorties dans un fluide visqueux.)

L'objet de l'exercice précédent, toujours dans le même fluide visqueux, est maintenant soumis à une excitation entretenue. L'écart de l'objet à sa position initiale est alors solution de l'équation différentielle

$$(E) : \frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 2y = 10\cos(2t)$$

1. Montrer que la solution g définie par $g(t) = 2\sin(2t) - \cos(2t)$ est une solution particulière de (E).
2. Déterminer alors l'ensemble des solutions de (E).
3. Déterminer la solution f de (E) vérifiant les conditions initiales $f(0) = 0$ et $f'(0) = 2$.

2.4 EDL du deuxième ordre avec second membre

Exercice 40

Soit l'équation différentielle (E) : $y'' - y' - 6y = 6t$.

1. Vérifier que les fonctions $y_1(t) = Ae^{3t}$ et $y_2(t) = Be^{-2t}$ sont des solutions de l'équation sans second membre (E_0) : $y'' - y' - 6y = 0$.
2. Déterminer les nombres réels a et b tels que $y_p(t) = at + b$ soit une solution de (E).
3. En déduire que $y = y_1 + y_2 + y_p$ est une solution générale de (E).

Exercice 41

Soit l'équation différentielle (E) : $y'' - 4y' + 3y = -3t^2 + 2t$.

Chercher une solution particulière de (E) sous la forme d'un polynôme du second degré.

Déterminer alors l'ensemble des solutions de l'équation (E).

Exercice 42

Soit l'équation (E) : $y'' - 4y' + 4y = 3e^{-t}$.

Chercher une solution particulière de (E) sous la forme $y_p(t) = Ae^{-t}$.

Déterminer alors l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 43

On considère l'équation différentielle $(E) : y''(x) - 2y'(x) + y(x) = x^2$

1. (a) Montrez que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 4x + 6$ est une solution de (E).
   (b) En déduire la forme générale des solutions de (E).
2. Montrez que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (2x - 5)e^x + x^2 + 4x + 6$ est une autre solution de (E).
3. Montrez que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (32x - 80)e^x + x^2 + 4x + 6$ est aussi solution de (E).

Exercice 44

On considère l'équation différentielle : $(E) : y'' - 3y' + 2y = 4$,

dans laquelle y est une fonction de la variable x.

1. Résoudre l'équation différentielle (E_0) sans second membre associée à (E).
2. Déterminer une fonction constante g solution de (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de (E).
4. Déterminer la solution particulière de (E) vérifiant de plus les conditions initiales $f(0) = 1$ et $f'(0) = 2$.

Exercice 45

Soit l'équation différentielle $(E) : y'' + 4y' + 3y = e^{-2x}$

dans laquelle y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Résoudre l'équation $y'' + 4y' + 3y = 0$.
2. Déterminer une solution particulière de (E) de la forme Ae^{-2x}, où A est un réel que l'on déterminera.
3. En déduire l'ensemble des solutions de (E).
4. Déterminer la solution particulière f de (E) qui vérifie $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$.

Exercice 46

On considère l'équation différentielle $(E) : x'' - 2x' - 3x = 3t^2 + 1$

où x est une fonction numérique de la variable t, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, x' la fonction dérivée de x et x'' la fonction dérivée seconde de x.

1. Résoudre l'équation $x'' - 2x' - 3x = 0$.
2. Chercher une solution particuliére de l'équation (E) sous la forme d'une fonction polynôme du second degré.
3. En déduire la solution générale de (E).
4. Déterminer la fonction f, solution de (E) telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$.

Exercice 47

Soit (E) : $y'' - 4y' + 4y = -\cos(2x)$.

1. Résoudre l'équation : $y'' - 4y' + 4y = 0$
2. Déterminer une solution particulière de la forme $g(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x)$.
3. En déduire une solution générale de (E).

Exercice 48

Soit (E) : $y'' + 4y = -\sin(2x)$.

1. Résoudre l'équation : $y'' + 4y = 0$
2. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \dfrac{1}{4}x\cos(2x)$ est une solution de (E).
3. En déduire une solution générale de (E).
4. Déterminer la solution particulière de (E) vérifiant $f(0) = 1$ et $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -1$.

Exercice 49

On veut résoudre l'équation différentielle $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = e^{-x}$,

notée (E), où y est une fonction de la variable réelle x, deux fois dérivable sur l'ensemble des nombres réels.

1. (a) Résoudre l'équation différentielle $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 0$.

   (b) Déterminer une fonction u, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que la fonction y_0, définie par $y_0(x) = u(x)e^{-x}$, soit solution de l'équation différentielle (E).

(c) Donner l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

(d) Déterminer la solution particulière f de l'équation (E) telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.

2. On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur l'intervalle $[0, 1]$ par

$$f(x) = e^{-x}\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right).$$

On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$ (unité graphique : 10 cm).

(a) Montrer que, pour tout nombre x appartenant à $[0; 1]$, $f'(x) = -\frac{x^2}{2}e^{-x}$.

(b) Étudier le signe de f' et dresser le tableau de variation de f.

(c) Tracer la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$.

(d) Sur la figure, on constate que l'équation $f(x) = 0,95$ admet une solution unique. Par lecture graphique, donner une valeur approchée à 10^{-1} près de cette solution (on fera apparaître sur la figure les tracés permettant cette lecture).

(e) À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de cette solution.

Exercice 50

Soit (E) l'équation différentielle :

$$y'' + 2y' + y = 4e^{-x}$$

où y est une fonction de la variable x, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' sa fonction dérivée et y'' sa dérivée seconde.

Partie A

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E_0) : $y'' + 2y' + y = 0$.
2. Montrer que la fonction y_1 définie sur $\mathbb{R}$ par : $y_1(x) = 2x^2e^{-x}$ est une solution particulière sur $\mathbb{R}$ de (E).
3. En déduire la solution générale sur $\mathbb{R}$ de (E).
4. Déterminer la solution y_2 de (E) qui vérifie : $y_2(0) = 4$ et $y_2'(0) = 1$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2x^2 + 5x + 4)e^{-x}$.
On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$ (unité graphique 1 cm).

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. On justifiera les résultats obtenus.
2. Étudier les variations de f.
3. Tracer la courbe C.
4. Soit $\mathcal{A}$ l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par les droites d'équations $x = 0$, $x = 1$ et la courbe $\mathcal{C}$.

   Donner la valeur exacte de $\mathcal{A}$, puis la valeur approchée à 10^{-3} près, de deux façons différentes :

   - en effectuant successivement deux intégrations par parties ;
   - en utilisant le fait que f est une solution de l'équation différentielle (E).

Exercice 51 (Good vibrations)

Une masse M est posée sur le sol à l'aide d'une suspension amortie.

Pour tout t de $[0, +\infty[$, on désigne par $x(t)$ la longueur du ressort (en mètres).

On établit en mécanique que la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $t \mapsto x(t)$ est solution de l'équation différentielle : $x'' + kx' + 25x = 20$ où k désigne une constante réelle positive qui dépend des caractéristiques de l'amortisseur.

Partie A

Les questions **l.** et **2.** sont, dans une large mesure, indépendantes.

1. Le but de cette partie est la résolution de l'équation différentielle :

$$x'' + kx' + 25x = 0 \quad (1)$$

où l'inconnue x est une fonction de la variable réelle t définie et deux fois dérivable sur $[0, +\infty[$ et k une constante positive.

   (a) Érire l'équation caractéristique de l'équation (1).

   (b) Donner suivant les valeurs de k les différentes formes des solutions.

   (c) Déterminer l'intervalle dans lequel il faut choisir le nombre k pour que l'équation (1) n'admette pas de solutions faisant intervenir des fonctions trigonométriques, donc que le système ne soit pas soumis à des oscillations.

2. Dans la suite on prend $k = 10$ et on considère l'équation différentielle :

$$x'' + 10x' + 25x = 20 \quad (2)$$

où l'inconnue x est une fonction de la variable réelle t définie et deux fois dérivable sur $[0, +\infty[$.

   (a) Résoudre l'équation différentielle :

$$x'' + 10x' + 25x = 0 \quad (3)$$

   (b) Déterminer le nombre réel m tel que la fonction constante h définie sur $[0, +\infty[$ par $h(t) = m$ soit solution de l'équation (2).

   (c) Déduire de ce qui précède l'ensemble des solutions de l'équation (2).

   (d) Déterminer la solution particulière x de l'équation (2) qui vérifie les conditions initiales $x(0) = 0,4$ et $x'(0) = 0$.

Partie B

Soit x la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$x(t) = (-2t - 0,4)e^{-5t} + 0,8$$

et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité graphique 10 cm).

1. a Déterminer $\lim_{t \to +\infty} x(t)$. En déduire l'existence d'une asymptote $\mathcal{D}$ dont on donnera une équation.

   b En admettant que la fonction x que l'on étudie soit solution du problème mécanique décrit au début de cet exercice, donner une interprétation du résultat obtenu au **B.l.a)**.

2. a Déterminer la dérivée x' de x.

b Établir le tableau de variation de x.

3. a Déterminer la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

   b Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau de valeurs suivant dans lequel on fera figurer éventuellement des valeurs décimales approchées à 10^{-2} près.

t	0	0,25	0,5	0,75	1	1,5	2
$x(t)$							

   c Construire $\mathcal{D}$, T et $\mathcal{C}$.

3 Pour aller plus loin

3.1 Série de Fourier

Exercice 52

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Soient α et β deux nombres réels.

Soit f une fonction périodique de période 1, définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 1[$ par $f(t) = \alpha t + \beta$.

On appelle a_0, a_n et b_n les coefficients de Fourier associés à la fonction f.

1. Montrer que $a_0 = \dfrac{\alpha}{2} + \beta$.
2. Montrer que $b_n = -\dfrac{\alpha}{n\pi}$ pour tout nombre entier naturel n non nul. On admet que $a_n = 0$ pour tout entier naturel n non nul.
3. On se propose de déterminer les nombres réels α et β pour que le développement S en série de Fourier de la fonction f soit défini pour tout nombre réel t par $S(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\sin(2n\pi t)$.
   (a) Déterminer les nombres réels α et β tels que $a_0 = 0$ et $b_n = \dfrac{1}{n}$.
   En déduire l'expression de la fonction f.
   (b) Représenter la fonction f sur l'intervalle $[-2\ ;\ 2]$ dans un repère orthogonal.

Partie B

On veut résoudre l'équation différentielle :

$$s''(t) + s(t) = f(t)$$

On admet que l'on obtient une bonne approximation de la fonction s en remplaçant $f(t)$ par les premiers termes du développement en série de Fourier de la fonction f obtenus dans la partie A, c'est-à-dire par :

$$\sin(2\pi t) + \frac{1}{2}\sin(4\pi t)$$

Soit (E) l'équation différentielle :

$$s''(t) + s(t) = \sin(2\pi t) + \frac{1}{2}\sin(4\pi t)$$

1. Vérifier que la fonction s_1 définie pour tout nombre réel t par :
   $$s_1(t) = \frac{1}{1-4\pi^2}\sin(2\pi t) + \frac{1}{2(1-16\pi^2)}\sin(4\pi t)$$
   est solution de l'équation différentielle (E).
2. Résoudre l'équation différentielle (E).

3.2 Exemple d'équation différentielle non linéaire

Exercice 53 (La vitesse du parachute (suite))

Un parachutiste saute d'un avion. On suppose que son parachute s'ouvre immédiatement. Sur l'ensemble homme et parachute, de masse totale m, s'exercent plusieurs forces :

- le poids de l'ensemble, mg où g est l'accélération de la pesanteur ;
- la résistance de l'air, $-kv^2$ où k est le coefficient strictement positif qui dépend de la voilure du parachute, et v^2 le carré de la vitesse ;
- la poussée d'Archimède de l'air qui sera considérée négligeable.

En écrivant la loi fondamentale de la dynamique pour le centre de gravité G de l'ensemble, on obtient l'équation différentielle $mv' = mg - kv^2$ où v est la fonction de la variable t, définie et dérivable sur $[0, +\infty[$ prenant pour valeur la norme du vecteur vitesse, et v' est la fonction dérivée de v.
En simplifiant, on obtient donc $v' = g - \frac{k}{m}v^2$. Dans la suite du problème, on prendra $g = 10$; $m = 70$ et $k = 28$ (en unités S.I.). L'équation différentielle sera donc :

$$v' = 10 - 0,4v^2 \quad (E)$$

Partie A

1. Démontrer que l'équation différentielle (E) peut s'écrire
$$\frac{v'}{25 - v^2} = 0.4$$
pour tout v de l'intervalle $[0, 5[$.
2. Déterminer deux nombres réels a et b tels que, tout v de l'intervalle $[0, 5[$,
$$\frac{1}{25 - v^2} = \frac{a}{5 + v} + \frac{b}{5 - v}.$$
3. Résoudre l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution particulière v telle que $v(0) = 0$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :

$$f(t) = \frac{e^{4t} - 1}{e^{4t} + 1}.$$

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. Étudier le sens de variation de f.
3. Quelle serait la limite de la vitesse $v(t)$ si t tendait vers $+\infty$.