Sommaire

1 Dérivabilité, calcul de dérivée 1

2 Développements limités 2

2.1 Calculs de limites 4

2.2 Applications des DL 4

1 Dérivabilité, calcul de dérivée

Exercice 1

Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f dans chacun des cas :

1. $a(x) = x + \dfrac{1}{x}$
2. $b(x) = \dfrac{-x^2 - x + 1}{x + 1}$
3. $c(x) = 2x^5 - \dfrac{x^3}{3}$
4. $d(x) = (3x + 2)x^2$
5. $e(x) = \dfrac{-2x + 1}{(x + 1)^2}$
6. $f(x) = \cos^2(x)$
7. $g(x) = \sin(2x + 1)$
8. $h(x) = x \sin(2x + 1)$
9. $i(x) = \sqrt{4 - x^2}$
10. $j(x) = -4x + 6x\sqrt{x}$
11. $k(x) = \sqrt{2 + \cos^2(2x + 1)}$
12. $l(x) = xe^x$
13. $m(x) = (x + 1)e^{-2x+1}$
14. $n(x) = \dfrac{e^x}{x}$
15. $o(x) = \ln(x)e^x$
16. $p(x) = \dfrac{\ln(x)}{(x + 1)^2}$
17. $q(x) = \ln(x^2 - x + 1)$

Théorème 1.

Soit f une fonction dérivable et strictement monotone sur un intervalle $]a; b[$ de dérivée partout non nulle alors la fonction réciproque f^{-1} est définie, dérivable et $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}(x)}$.

Exercice 2

En justifiant l'utilisation de ce théorème, déterminer les ensembles de définition, les dérivées des fonctions réciproques des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \cos(x)$
2. $f(x) = \sin(x)$
3. $f(x) = \tan(x)$

Exercice 3 (Dérivabilité de $x \mapsto x^{1/n}$)

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et soit $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction $g_n(x) = x^{1/n}$. Rappelons que g est par définition la fonction réciproque de la restriction à $[0, +\infty[$ de la fonction $f_n(x) = x^n$.

1. Montrer que g_n est dérivable sur $]0, +\infty[$ et déterminer sa dérivée.
2. Montrer que le graphe de g_n admet une demi-tangente verticale en 0.

Exercice 4 (calcul de dérivées)

1. Calculer les dérivées des fonctions f_i suivantes définies par :

$$f_1(x) = x\ln(x) \qquad f_3(x) = \sqrt{1+\sqrt{1+x^2}} \qquad f_6(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \arctan(x)$$

$$f_2(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \qquad f_4(x) = \left(\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right)^{\frac{1}{3}}$$

2. Soit $f :]1,+\infty[\to]-1,+\infty[$ définie par $f(x) = x\ln(x) - x$. Montrer que f est une bijection.

   Notons $g = f^{-1}$. Calculer $g(0)$ et $g'(0)$.

3. Calculer les dérivées successives de $f(x) = \ln(1+x)$, de même pour $f(x) = x^3\ln(x)$.

Exercice 5 (Condition nécessaire et condition suffisante de minimalité)

Soit f une application $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$.

1. On suppose que f est de classe C^1 et que f admet un minimum local en a. Montrer que $f'(a) = 0$.
2. On suppose que f est de classe C^2, $f'(a) = 0$ et $f''(a) > 0$. Montrer que f admet un minimum local en a.
3. Donner un exemple où f est de classe C^2, $f'(a) = 0$, $f''(a) = 0$ et f n'admet pas un minimum local en a.

Exercice 6 (Dérivée non continue)

On définit f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Montrer que f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La dérivée de f est-elle continue ?

Exercice 7

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = x + e^x$. Montrer que f est strictement croissante, continue et bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note g l'application réciproque de f. Montrer que g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer $g'(1)$ et $g''(1)$.

2 Développements limités

Exercice 8

1. Écrire le DL en 0 à l'ordre 2 de $h : x \mapsto \sqrt{1+x}$.
2. Justifier l'expression du DL de $k : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ à l'aide de l'unicité du DL et de la somme d'une suite géométrique.
3. Écrire le DL en 0 à l'ordre 3 de $f : x \mapsto \sqrt[3]{1+x}$. Même question avec $g : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}}$.

Exercice 9 (DL somme, opérations)

1. Calculer le DL en 0 à l'ordre 3 de $f_1 : x \mapsto \exp(x) - \dfrac{1}{1+x}$, puis de $g_1 : x \mapsto x\cos(2x)$ et $h_1 : x \mapsto \cos(x) \times \sin(2x)$.
2. Calculer le DL en 0 à l'ordre 3 de $f_2 : x \mapsto \sqrt{1+2\cos(x)}$, puis de $g_2 : x \mapsto \exp(\sqrt{1+2\cos(x)})$.
3. Calculer le DL en 0 à l'ordre 3 de $f_3 : x \mapsto \ln(1+\sin(x))$. Même question à l'ordre 6 pour $g_3 : x \mapsto (\ln(1+x^2))^2$.
4. Calculer le DL en 0 à l'ordre n de $f_4 : x \mapsto \frac{\ln(1+x^3)}{x^3}$. Même question à l'ordre 3 pour $g_4 : x \mapsto \dfrac{e^x}{1+x}$.

Exercice 10

Déterminer les développements limités au voisinage de zéro à l'ordre 3 des fonctions suivantes :

1. $f(x) = e^{-x} - 2\sqrt{1+x}$
2. $h(x) = \dfrac{\sin(x)}{1-x^2}$
3. $i(x) = \sqrt{1+\sin(x)}$
4. $j(x) = \tan(x)$
5. $f(x) = \dfrac{1}{1-x} - e^x$
6. $g(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sqrt{1+x}}$
7. $h(x) = \dfrac{1}{1+x+\frac{x^2}{2}}$
8. $i(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$
9. $j(x) = \ln\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)$
10. $g(x) = \sqrt{1-x} \times \ln(1+x^2)$

Exercice 11

1. Par intégration retrouver la formule du DL de $f_5 : x \mapsto \ln(1+x)$.
2. Même question à l'ordre 3 pour $g_5 : x \mapsto \arccos(x)$.

Exercice 12

Déterminer les $DL_n(0)$ des fonctions réciproques :

1. $f(x) = \arccos(x)$
2. $f(x) = \arcsin(x)$
3. $f(x) = \arctan(x)$

Exercice 13

On définit f sur $]-\infty, 1[$ par : $f(x) = \arctan \frac{1}{1-x}$.

Donner le développement limité à l'ordre 3 de f en 0.

Exercice 14 (Fonctions hyperboliques)

1. On considère la fonction $x \mapsto \cosh(x)$ avec $\cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$. Déterminer le DL en 0 de cette fonction.
2. On considère la fonction $x \mapsto \sinh(x)$ avec $\sinh(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$. Déterminer le DL en 0 de cette fonction.

Exercice 15 (DL d'un polynôme...)

Donner le développement limité à l'ordre 7 en -1 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 1$.

Exercice 16 (DL(3))

1. Calculer le DL d'ordre 3 en 0 de f définie pour $x \in]-1, 1[$ par $f(x) = \sin(x) - \cos(x) + \tan(x) + \dfrac{1}{1-x}$.
2. Calculer le DL d'ordre 3 en $\frac{\pi}{2}$ de f définie pour $x \in]0, \pi[$ par $f(x) = \ln(\sin(x))$.

Exercice 17 (DL(4))

Donner le DL d'ordre 4 en 0 des fonctions suivantes (définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) :

$$f(x) = (1+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{2}}, \qquad g(x) = e^{\cos(x)}.$$

Exercice 18 (DL(n))

On définit f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x-1} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrer que f est continue en 0 et admet un DL_n en 0, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

Exercice 19

Calculer le DL en $+\infty$ à l'ordre 5 de $h : x \mapsto \dfrac{x}{x^2-1}$. Même question à l'ordre 2 pour $\varphi : x \mapsto \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$.

2.1 Calculs de limites

Exercice 20 (Utilisation des DL(1))

Donner la limite en 0 de f définie sur $]0,\infty[$ par : $f(x) = \frac{e^x-1-x}{x^2}$

Exercice 21

En utilisant des développements limités, calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x}-1-x}{x^2}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-\sqrt{\cos(x)}}{x^2}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3\ln(3+x)-3\ln(3)-x}{x^2}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right)$
5. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-x}{x}$.
6. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\ln(x)}$

Exercice 22 (Limites)

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$
2. $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+2x+2}+x$
3. $\lim_{x\to -\infty} \sqrt{x^2+2x+2}+x$

Exercice 23

Déterminer la limite en 1 de $x \longmapsto \dfrac{\ln\left(2x^2-1\right)}{x\sqrt{x}-1}$

Exercice 24

Déterminer la limite en 2 de $x \longmapsto \dfrac{\ln(x-1)}{x^2-4}$

Exercice 25 (Limite en 0)

Trouver les limites en 0 des fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}^\star$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{1+x^2}-\cos(x)\right), \quad g(x) = \frac{\arctan(x)-x}{\sin(x)-x}, \quad h(x) = \frac{e^x-\cos(x)-\sin(x)}{x^2}.$$

Exercice 26 (Limite en $+\infty$)

Pour $x>0$ on pose $f(x) = x^2(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}})$. Déterminer $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

On pourra, sur une une fonction convenable, utiliser un développement limité.

2.2 Applications des DL

Exercice 27

Soit $k : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x^3+1}{x+1}}$. Déterminer une équation de l'asymptote de k en $+\infty$ et la position du graphe par rapport à cette asymptote.

Exercice 28

Déterminer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 1 de la fonction : $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$

Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ?

Exercice 29 (Étude de la fonction $x \mapsto x \arctan x$)

Étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x \arctan x$.

Montrer que f est paire. Calculer f' et f". Étudier les asymptotes.

Exercice 30

Les trois questions sont indépendantes

1. (a) Étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$

   (b) Démontrer que la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$ puis puis étudier la position relative de la courbe et de son asymptote.

2. Étudier les asymptotes en $+\infty$ et $-\infty$ de la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $g(x) = x^2 \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$

3. Étudier l'asymptote en $+\infty$ de la fonction h définie sur $]1; +\infty[$ par : $h(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$

Exercice 31

On considère la fonction f définie sur $I =]-1; +\infty[$ par $f(x) = (-x - 2)e^{-x}$.

On note $\mathcal{C}_0$ la courbe représentative de f dans un repère donné.

1. Montrer que la fonction f est croissante sur I.
2. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_0^2 f(x)dx$.
3. Écrire le développement limité d'ordre 3 en 0 de e^{-x} puis celui de f.
4. En déduire une équation de la tangente T, à la courbe $\mathcal{C}_0$ au point d'abscisse 0, et la position relative de T et $\mathcal{C}_0$ au voisinage de ce point.

Exercice 32

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\cos(3x)$.

On note $\mathcal{C}_0$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal (unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses pour $\dfrac{\pi}{3}$ et 3 cm sur l'axe des ordonnées).

1. (a) Montrer que le développement limité d'ordre 2 en 0 de f est :

   $$1 - x - 4x^2 + x^2\varepsilon(x) \text{ où } \lim_{x \mapsto 0} \varepsilon(x) = 0$$

   (b) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_0$ au point d'abscisse 0.

   (c) Déterminer la position relative de $\mathcal{C}_0$ et T.

2. Construire sur l'intervalle $[-\dfrac{\pi}{3}; +\dfrac{\pi}{3}]$ la courbe $\mathcal{C}_0$ et T.

3. (a) Résoudre l'inéquation $f(x) \geq 0$.

   (b) En faisant une double intégration par parties, montrer que l'on a

   $$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} f(x)dx = \frac{3}{10}\left(e^{\frac{\pi}{6}} + e^{-\frac{\pi}{6}}\right)$$

   (c) Déterminer l'aire en cm^2 de la partie du plan limité par $\mathcal{C}_0$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -\dfrac{\pi}{6}$ et $x = \dfrac{\pi}{6}$.

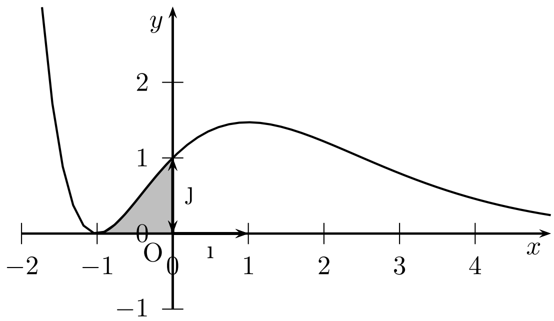
Exercice 33

A - Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle $(E)\ :\ y'' - y' - 2y = (-6x-4)\mathrm{e}^{-x}$
où y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' sa fonction dérivée première et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. Résoudre l'équation différentielle $(E_0)\ :\ y'' - y' - 2y = 0$.
2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $: h(x) = (x^2+2x)\mathrm{e}^{-x}$.
   Démontrer que h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = 1$ et $f'(0) = 1$.

B - Étude d'une fonction Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2+2x+1)\mathrm{e}^{-x}$.
Sa courbe représentative est donnée sur la figure ci-après



1. (a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
   (b) Interpréter graphiquement le résultat obtenu en $+\infty$.
2. (a) Démontrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = (1-x^2)\mathrm{e}^{-x}$.
   (b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f'(x) \geq 0$.
   (c) En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
3. (a) À l'aide du développement limité au voisinage de 0 de la fonction $t \mapsto e^t$, donner le développement limité, à l'ordre 2 au voisinage de 0, de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$.
   (b) Démontrer que le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0 de la fonction f est
   $$f(x) = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + x^2\epsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\mapsto+\infty} \epsilon(x) = 0$$
   (c) En déduire une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_0$ au point d'abscisse 0 et la position relative de $\mathcal{C}_0$ et T au voisinage de ce point.

C - Calcul intégral

1. (a) La fonction f définie dans la partie **B** étant une solution différentielle de l'équation différentielle $(E)\ :\ y''-y'-2y = (-6x-4)e^{-x}$, montrer que f vérifie pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}\left(f''(x) - f'(x) + (6x+4)\mathrm{e}^{-x}\right)$

(b) Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \frac{1}{2}\left(f'(x) - f(x) - (6x+10)\mathrm{e}^{-x}\right)$ Vérifier que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $\quad F(x) = (-x^2 - 4x - 5)\mathrm{e}^{-x}$

(c) Utiliser ce qui précède pour démontrer que l'aire $\mathcal{A}$ de la partie grisée sur la figure est, en unité d'aire, $\mathcal{A} = 2\mathrm{e} - 5$

Exercice 34

A - Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle $\qquad (E) : \ 2y'' + 2y' + y = (5x^2 + 22x + 31)\mathrm{e}^x$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' la fonction dérivée de y et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle $(E_0) : \ 2y'' + 2y' + y = 0$.
2. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \left(x^2 + 2x + 3\right)\mathrm{e}^x$ est une solution particulière de (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution particulière f de (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = 3$ et $f'(0) = 5$.

B - Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(x^2 + 2x + 3\right)\mathrm{e}^x$.

On désigne par $\mathcal{C}_0$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O; (\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}))$.

1. Démontrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = (x^2 + 4x + 5)\mathrm{e}^x$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ lorsque x varie dans $\mathbb{R}$.
3. (a) Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

   (b) Déterminer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$. Que peut-on en déduire pour la courbe C ?
4. Établir le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
5. (a) Démontrer que le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est :

   $f(x) = 3 + 5x + \frac{9}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

   (b) En déduire une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

   (c) Étudier la position relative de C et T au voisinage du point d'abscisse 0.

Exercice 35

On considère la fonction f définie sur $[0;1]$ par $f(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{x+1}}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé. On désigne par E l'ensemble des points du plan délimité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 1$.

1. Étudier les variations de la fonction f sur $[0;1]$.
2. (a) Déterminer le développement limité de la fonction f au voisinage de zéro à l'ordre 2.

   (b) En déduire une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 et préciser la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à cette tangente.

(c) En utilisant le développement limité trouvé précédemment, déterminer une valeur approchée de l'aire en cm^2 du domaine E.

3. Calculer la valeur exacte de l'aire en cm^2 de l'ensemble E (on pourra poser : $u = x + 1$).

4. Par rotation de l'ensemble E autour de l'axe des abscisses, on obtient un solide de révolution $\mathcal{S}$.
   Calculer le volume en cm^3 du solide $\mathcal{S}$.

Exercice 36

Soit f la fonction définie sur $]-1;1[$ par : $f(x) = \ln(1 - x^2) - x$. On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

1. Déterminer la limite de f en -1 et en 1. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}$?
2. Étudier les variations de la fonction f sur $]-1;1[$.
3. (a) Déterminer le développement limité de f au voisinage de zéro à l'ordre 4.
   (b) En déduire une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 et préciser la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à cette tangente au voisinage de 0.
   (c) Calculer une valeur approchée de l'aire exprimée en cm^2 du domaine limité par l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées, la courbe $\mathcal{C}$ et la droite d'équation $x = \dfrac{1}{2}$. En donner une valeur approchée au centième.

Exercice 37

Soit la fonction f définie sur $]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+\tan x)}{\sin x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue et dérivable en 0.
2. Donner le développement limité de f en 0 à l'ordre 2.
3. Donner l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0 et la position locale de la courbe de f par rapport à cette tangente.