Sommaire

1 Dérivation

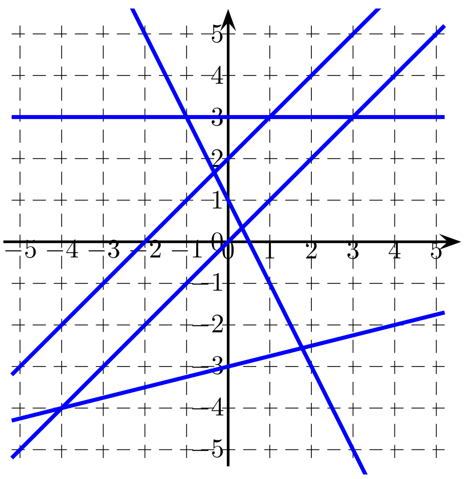
1.1 Rappels - Introduction

Exercice 1

Déterminer l'équation de la droite D passant par $A(1;2)$ et $B(5;10)$.

Exercice 2

Déterminer l'équation des droites.



Exercice 3

Soit $f(x) = x^2 - 2x$. Soit A le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 1, et B le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 3.

Déterminer l'équation de la droite D passant par A et B. Tracer $\mathcal{C}_f$ et D.

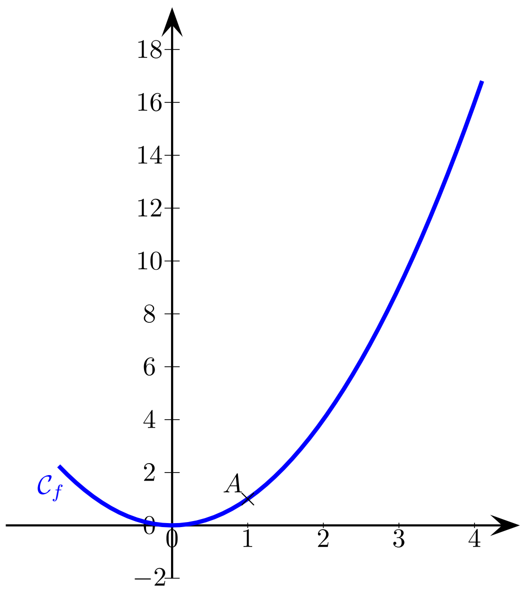
Exercice 4

Soit f la fonction carré et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative. On note A, M_1, M_2 et M_3 les points de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses respectives 1, 2, 3 et 4.

1. Tracer sur une figure $\mathcal{C}_f$ et placer les points A, M_1, M_2, M_3.
2. Calculer les coefficients directeurs des droites (AM_3), (AM_2) et (AM_1).
3. Soit un nombre réel $h > 0$, et M le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse $1 + h$.
   Donner une expression du coefficient directeur m_h de la droite (AM).
4. Compléter le tableau :

h	1	$0,5$	$0,1$	$0,01$	$0,001$	$0,0001$
m_h						

5. Que se passe-t-il lorsque h se rapproche de 0 ?



Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 3$.

1. Tracer dans un repère orthogonal $\mathcal{C}_f$ et sa tangente au point d'abscisse $a = 1$.
   Déterminer alors graphiquement $f'(1)$.
2. a Pour $h > 0$, on pose $m_h = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.
   Compléter le tableau :

h	1	$0,5$	$0,1$	$0,01$	$0,001$	$0,0001$
m_h						

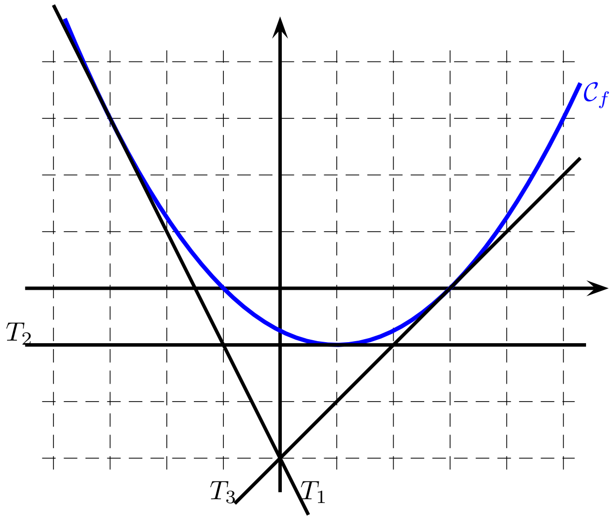
   Vers quelle valeur tend le nombre a_h lorsque le nombre h tend vers 0 ?

   b Démontrer ce résultat algébriquement à partir de l'expression de m_h et de celle de f.

Exercice 6

$\mathcal{C}_f$ est la courbe représentative d'une fonction f.

T_1, T_2 et T_3 sont les tangentes à $\mathcal{C}_f$ aux points d'abscisses respectives -3, 1 et 3.
Déterminer $f'(-3)$, $f'(1)$ et $f'(3)$.



1.2 Calculs de dérivées

Exercice 7

Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f dans chacun des cas :

a) $f(x) = 3$ b) $f(x) = 3x$ c) $f(x) = \frac{5}{2}x$ d) $f(x) = x^2$

e) $f(x) = x^7$ f) $f(x) = 2x^3$ g) $f(x) = 3x + 2$ h) $f(x) = x + \frac{1}{x}$

i) $f(x) = -x^2 + x - \frac{7}{2}$ j) $f(x) = \frac{2x}{x+1}$ k) $f(x) = \frac{-x^2 - x + 1}{x+1}$ l) $f(x) = \frac{4}{x}$

m) $f(x) = 2x^5 - \frac{x^3}{3}$ n) $f(x) = (3x+2)x^2$ o) $f(x) = (-2x+1)(x+1)$ p) $f(x) = \frac{-2x+1}{(x+1)^2}$

q) $f(x) = 3\cos(x)$ r) $f(x) = \cos^2(x)$ s) $f(x) = \sin(2x+1)$ t) $f(x) = x\sin(2^2+1)$

Exercice 8 (Dérivée de la fonction tangente)

La fonction tangente est définie par tan : $x \mapsto \frac{\sin x}{\cos x}$. Calculer sa fonction dérivée.

Exercice 9

Déterminer la fonction dérivée des fonctions suivantes :

- $f_1 : x \mapsto x^{23} - \frac{12x^{11}}{5} + 3,5x^7 - \frac{1}{x}$
- $f_2 : x \mapsto \sqrt{x} + \frac{1}{x+2}$
- $f_3 : x \mapsto \sqrt{x+3}$
- $f_4 : x \mapsto \frac{x^3 + 3x + 1}{2x^2 + 4x + 8}$
- $f_5 : x \mapsto \sqrt{x^2 + 3x - 10}$
- $f_6(x) = \frac{x^2+2}{x-5}$
- $f_7(x) = x^2\cos(x)$
- $f_8(x) = \cos(2x+3)$
- $f_9(x) = (2x^2 + 3x - 2)^7$
- $f_{10}(x) = \sqrt{4 - x^2}$
- $f_{11}(x) = -4x + 6x\sqrt{x}$
- $f_{12}(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$
- $f_{13}(x) = \left(\frac{3x-4}{x-1}\right)^3$
- $f_{14}(x) = \sqrt{3x^2 - \frac{1}{9x}}$
- $f_{15}(x) = \sqrt{2 + \cos^2(2x+1)}$

Exercice 10 (Des calculs de dérivées ...)

1. Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$$f(x) = x^3 + 2x - \frac{2}{x} \qquad g(x) = \frac{2x+1}{x+2} \qquad h(x) = xe^x \qquad k(x) = (x+1)e^{-2x+1}$$

2. Calculer la dérivée f' puis la dérivée seconde $f'' = (f')'$ des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 3x^2 - \frac{1}{2}x^2 + 3$ *b)* $f(x) = e^{2x+1}$ *c)* $f(x) = e^{-x^2}$ *d)* $f(x) = \frac{e^x}{x}$

1.3 Equation de tangente

Exercice 11

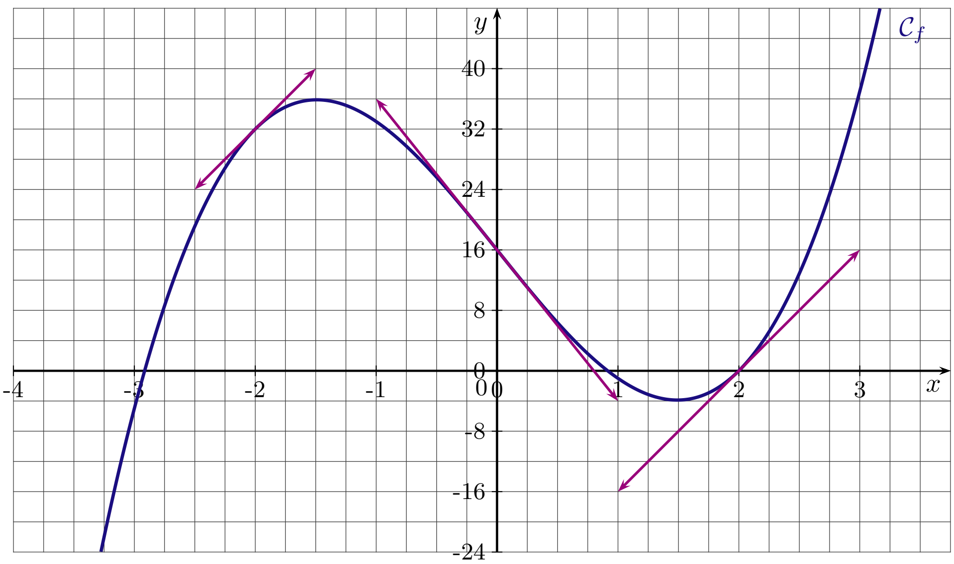
Donner dans chacun des cas l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a :

1. $f(x) = x^3 + 8x - 32$ en $a = 2$
2. $f(x) = \dfrac{1}{3x^2 - x + 2}$ en $a = 1$
3. $f(x) = \cos\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ en $a = \dfrac{\pi}{2}$

1.4 Étude des variations d'une fonction

Exercice 12

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Certaines tangentes à la courbe ont également été représentées.



Partie A

On note f' la dérivée de la fonction f. À partir du graphique :

1. Déterminer $f'(-2)$, $f'(0)$ et $f'(2)$.
2. Donner une estimation des solutions de l'équation $f'(x) = 0$.

Partie B

La fonction f est définie pour tout réel x par $f(x) = 3x^3 - 20x + 16$.

1. Calculer $f'(x)$.

2. Calculer $f'(-2)$, $f'(0)$ et $f'(1,5)$, comparer ces résultats avec les valeurs obtenues dans la partie A.

3. Déterminer les abscisses des points en lesquels la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ est parallèle à l'axe des abscisses.

4. Donner le tableau de variation de la fonction f.

Exercice 13

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{15x+60}{x^2+9}$. On note f' la dérivée de la fonction f.

1. Calculer $f'(x)$.

2. Étudier le signe de $f'(x)$.

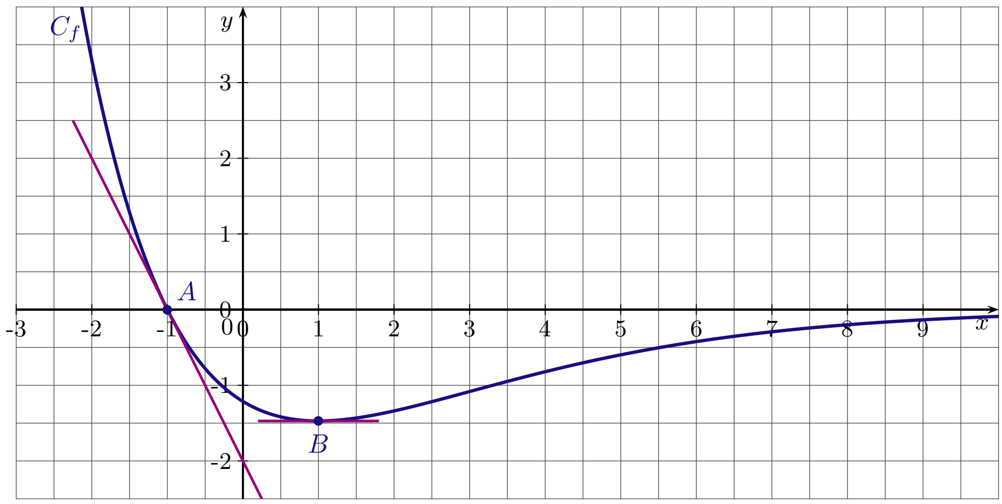
3. Donner le tableau des variations de f.

4. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse -4.

Exercice 14

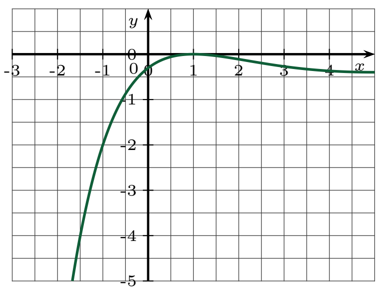
La courbe C_f ci-dessous représente une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' la fonction dérivée de la fonction f. On sait que :

- la courbe coupe l'axe des abscisses au point A et la tangente à la courbe au point A passe par le point de coordonnées $(0;-2)$;
- la courbe admet au point B d'abscisse 1 une tangente parallèle à l'axe des abscisses ;

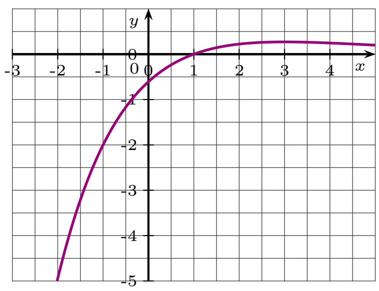


1. À partir du graphique et des renseignements fournis, déterminer $f'(-1)$ et $f'(1)$.

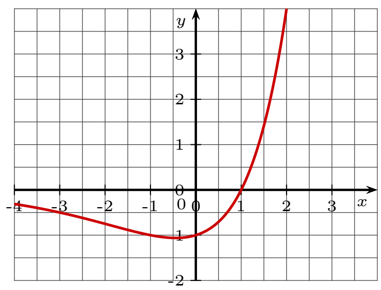
2. Une des trois courbes ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f' . Déterminer laquelle.



courbe C_1



courbe C_2



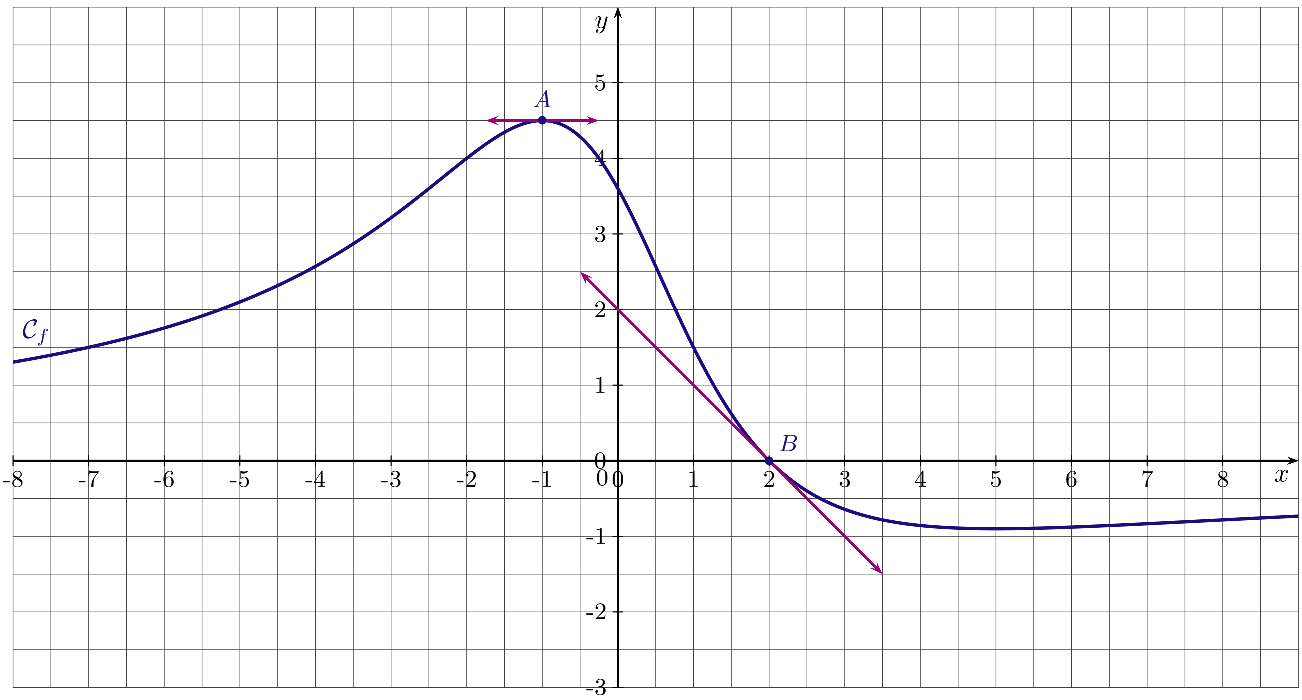
courbe C_3

Exercice 15

Partie A

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On sait que :

- La tangente au point $A\left(-1;\dfrac{9}{2}\right)$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ est parallèle à l'axe des abscisses.
- La tangente au point $B\,(2;0)$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ passe par le point de coordonnées $(0;2)$.



On note f' la dérivée de la fonction f. À partir du graphique et des renseignements fournis :

1. Déterminer $f'(-1)$ et $f'(2)$.
2. La tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 a pour équation $y=-2x+\dfrac{7}{2}$.

   Déterminer $f(1)$ et $f'(1)$.
3. Pour chacune des affirmations ci-dessous, dire si elle est vraie ou si elle est fausse en justifiant votre choix.
   (a) $f'(0)\times f'(3)\leqslant 0$.
   (b) $f'(-3)\times f'(1)\leqslant 0$.

Partie B

La fonction f est définie pour tout réel x par $f(x)=\dfrac{18-9x}{x^2+5}$.

1. Montrer que pour tout réel x, $f'(x)=\dfrac{9\left(x^2-4x-5\right)}{\left(x^2+5\right)^2}$.
2. (a) Étudier le signe de $f'(x)$.
   (b) Donner le tableau de variations de la fonction f.
3. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse (-2).

Exercice 16

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left]-\frac{3}{2};+\infty\right[$ par $f(x)=8x^2-2x-\dfrac{9}{2x+3}$.

1. On note f' la dérivée de la fonction f. Montrer que $f'(x)=\dfrac{8x\left(8x^2+23x+15\right)}{(2x+3)^2}$.
2. Étudier les variations de la fonction f.

Exercice 17

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{x^2-x+4}{x^2+3}$. On note C_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

1. Calculer la dérivée de la fonction f.
2. Étudier les variations de f.
3. Donner une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 1.

Exercice 18

Une entreprise fabrique et commercialise un certain produit. Sa capacité de production mensuelle est inférieure à 15 000 articles.

Soit x le nombre de milliers d'articles fabriqués chaque mois ; le coût de production exprimé en milliers d'euros est modélisé par la fonction C définie pour tout x élément de l'intervalle $[0;15]$ par
$C(x)=\dfrac{16x^2+11x+60}{x+14}$.

La courbe représentative de la fonction C, notée $\mathcal{C}_T$, est donnée en annexe ci-dessous.

1. Chaque article est vendu 8€, $R(x)=8x$ est la recette mensuelle exprimée en milliers d'euros.

   Le bénéfice mensuel exprimé en milliers d'euros est modélisé par la fonction B définie sur l'intervalle $[0;15]$ par $B(x)=R(x)-C(x)$.

   (a) Calculer le montant en euros, du bénéfice si l'entreprise fabrique et vend 6000 articles un mois donné.

   (b) Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0;15]$ on a $B'(x)=\dfrac{-8x^2-224x+1474}{(x+14)^2}$.

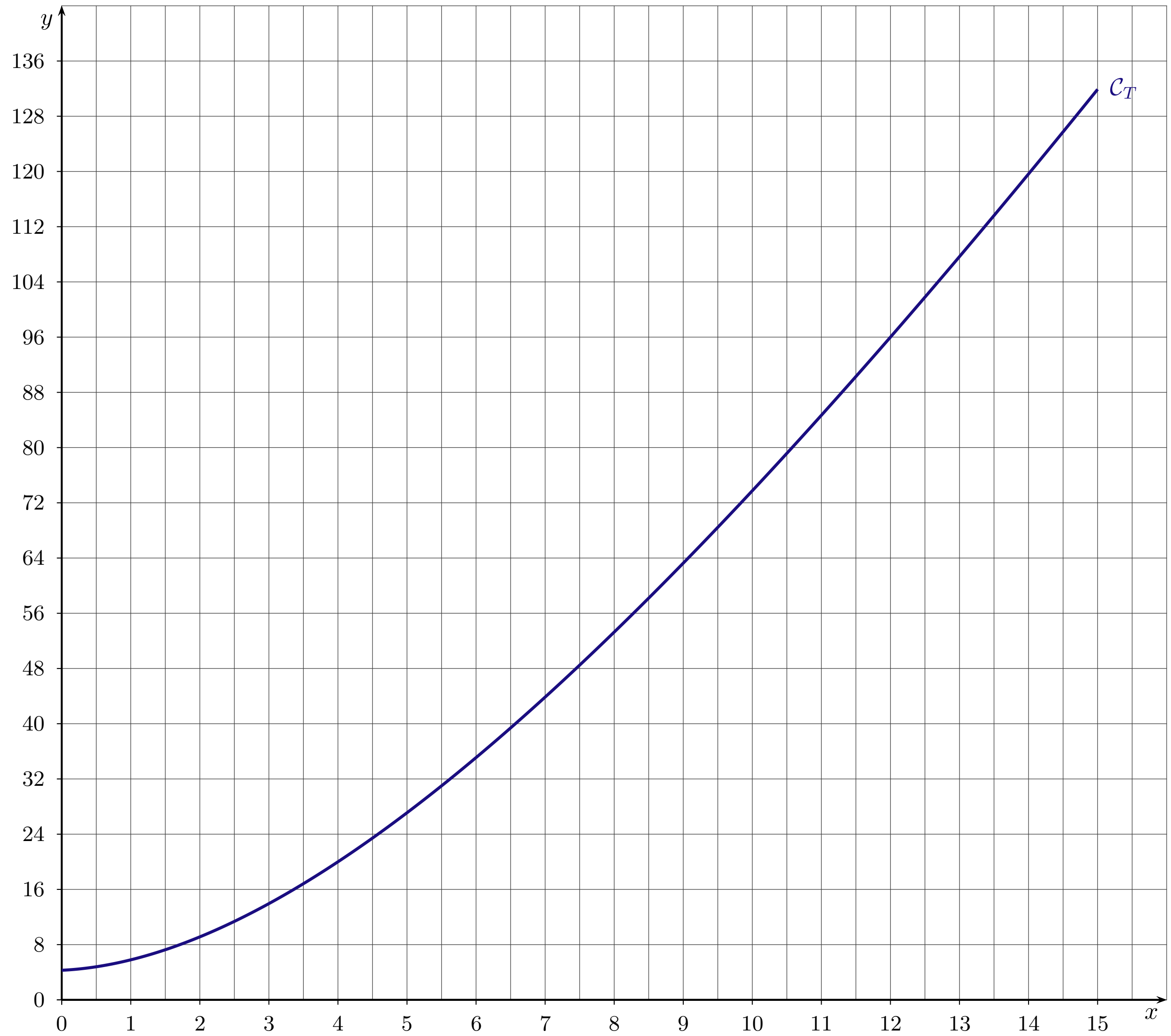
   (c) Étudier les variations de la fonction B.

   (d) En déduire le nombre d'articles qu'il faut fabriquer et vendre chaque mois pour obtenir un bénéfice maximal. Quel est le montant en euro, de ce bénéfice maximal ?

2. Le coût marginal de fabrication pour une production de x milliers d'articles est donné par $C'(x)$ où C' est la dérivée de la fonction C.

   Vérifier que si le bénéfice est maximal alors le coût marginal est égal au prix de vente d'un article.

annexe



Exercice 19

Soit f une fonction dérivable sur chacun des intervalles où elle est définie. Le tableau des variations de la fonction f est donné ci-dessous :

x	-3		1		5		$+\infty$
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	2	↘	1 ‖ $+\infty$	↘	-1

1. (a) La fonction f est-elle continue sur $]-3;+\infty[$?

   (b) Donner deux intervalles où f est continue mais pas monotone.

   (c) Donner deux intervalles où f est continue et strictement monotone.

2. (a) Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.

   (b) L'équation $f(x) = 1$ admet-elle une solution unique ?

3. On note f' la dérivée de la fonction f. Pour chacune des affirmations ci-dessous, dire si elle est vraie ou si elle est fausse.

   (a) L'équation $f'(x) = 0$ n'a pas de solution sur $]5;+\infty[$

(b) $f'(-2) \times f'(0) \leqslant 0$

(c) $f'(-2) \times f'(3) \leqslant 0$

Exercice 20

Soit f la fonction définie $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$ par $f(x) = \dfrac{2x^3 - 3x^2 - 2x - 1}{2x + 1}$. On note f' sa dériée.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Donner le tableau des variations de la fonction f.
3. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.

   À l'aide de la calculatrice, donner la valeur arrondie à 10^{-3} près, des solutions de l'équation $f(x) = 0$.

Exercice 21

Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 2x$.

1. Donner le tableau de variation de f
2. Donner l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en $x_0 = 2$.
3. Donner de même les équations des tangentes en $x_0 = -2$, $x_0 = 0$ et $x_0 = 1$.
4. Tracer dans un repère ces quatre droites et $\mathcal{C}_f$.

Exercice 22

Soit f la fonction définie sur $[-10; 10]$ par $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 10$.

Rechercher les éventuels extrema locaux et globaux de f.

Exercice 23

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

Déterminer les coordonnées de l'extremum de f. Est-ce un minimum ou un maximum ?

Exercice 24

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-6; 4]$.

On donne le tableau de variation de la fonction f' ci-contre.

Préciser les éventuels extrema locaux de f.

x	-6		-2		1		4
f'	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	3

Exercice 25

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-6; 4]$.

On donne le tableau de variation de la fonction f' ci-contre.

Préciser les éventuels extrema locaux de f.

x	-4		-1		1		2		4
f'	-7	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	3

Exercice 26

La consommation C d'un véhicule peut s'exprimer en fonction de la vitesse v, pour une vitesse comprise entre 10 km/h et 130 km/h, par l'expression

$$C(v) = 0,06v + \frac{150}{v} .$$

À quelle vitesse faut-il rouler pour que la consommation soit minimale ?

Exercice 27

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression : $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$. Interpréter graphiquement ces résultats.
2. Dresser le tableau de variation de f.
3. Déterminer l'équation de la tangente T_0 au point d'abscisse 0.
4. Tracer T_0 et C_f la courbe représentative de f .

Exercice 28

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-3;1\}$ par l'expression : $f(x) = \dfrac{x}{x^2+2x-3}$.

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. Interpréter graphiquement ces résultats.
2. Dresser le tableau de variation de f.
3. Déterminer l'équation de la tangente T_0 au point d'abscisse 0.
4. Tracer T_0 et C_f la courbe représentative de f.

Exercice 29

Déterminer les extrema éventuels de $f : x \mapsto x + \frac{2}{x}$.

Vérifier que ces points sont bien des extrema, et préciser s'il s'agit de minima ou de maxima.

Exercice 30

f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4$.

Montrer que -6 est un minorant de f sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 31

f_m est la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$ par : $f_m(x) = \dfrac{x^2+mx}{x^2-1}$, où m est un réel.

Pour quelles valeurs de m, f_m n'admet-elle ni maximum ni minimum ?

1.5 Résolution d'équation

Exercice 32

Soit f une fonction définie et dérivable sur $[-2;5]$ et dont le tableau de variation est le suivant :

x	-2		1		4		5
f			4				10
		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	1				-3		

Déterminer le nombre de solutions, et l'intervalle où elles se situent, de l'équation

1. $f(x) = 0$
2. $f(x) = 2$
3. $f(x) = -5$

Exercice 33

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x + 1$.

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[-3; 2]$.

Déterminer un encadrement plus précis de cette solution.

Exercice 34

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x - 1$.

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement trois solutions, respectivement dans les intervalles $]-2; -1[$, $]-1; 1[$ et $]1; 2[$.

Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de la plus grande de ces solutions.

Exercice 35

On donne ci-contre le tableau de variation d'une fonction f.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	-5	$\nearrow$	1

Quel est le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 2$. (on justifiera le résultat).

Exercice 36

Démontrer que l'équation $x^3 + 3x = 5$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de cette solution.

Exercice 37

On considère la fonction h définie sur $]-1; +\infty[$ par $h(x) = 2x - 3 + \sqrt{x+1}$.

1. Donner le tableau de variations de h.
2. En déduire que l'équation $\sqrt{x+1} = 3 - 2x$ admet une unique solution α dans $[-1; +\infty[$.
3. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

Exercice 38

f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par $g(x) = 9 + \frac{12}{x-3}$.

1. a Étudier les variations de g et ses limites aux bornes de son ensemble de définition.
   b Dans un même repère, tracer les courbes représentatives des fonctions f et g.
   c Indiquer, par lecture graphique, le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x) = g(x)$.
2. h est la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par : $h(x) = (x-3)(f(x) - g(x))$.
   a Étudier les limites de h en $-\infty$ et $+\infty$.
   b Étudier les variations de h et dresser son tableau de variations.
   c En déduire que l'équation $f(x) = g(x)$ admet trois solutions.
   d Donner un encadrement d'amplitude 10^{-1} de chaque solution.

Exercice 39

On note (E) l'équation $x^3 - 15x - 4 = 0$ et (I) l'inéquation $x^3 - 15x - 4 > 0$.

1. Résolution graphique

1. Montrer que l'équation (E) est équivalente à l'équation $x^2 - 15 = \dfrac{4}{x}$
2. Tracer dans un même repère les courbes représentatives des fonctions $x \mapsto x^2 - 15$ et $x \mapsto \dfrac{4}{x}$.
3. Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation (E).

   Une des solutions est un nombre entier, quelle est sa valeur ?

   Encadrer chacune des autres solutions α et β (avec $\alpha < \beta$) par deux entiers consÃ©cutifs.
4. Démontrer que l'inéquation (I) s'écrit sur $]0; +\infty[$, $x^2 - 15 > \dfrac{4}{x}$, et sur $]-\infty; 0[$, $x^2 - 15 < \dfrac{4}{x}$.

2. Étude d'une fonction

f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 15x - 4$. C_f est sa courbe représentative.

1. Justifier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
3. Déterminer les variations de f et dresser son tableau de variations. Tracer l'allure de C_f.
4. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement trois solutions dans $\mathbb{R}$.
5. Donner un encadrement à 10^{-2} près de chacune des solutions.
6. Étudier le signe de la fonction f. En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation (I).

3. Méthode algébrique

1. Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout réel x, $x^3 - 15x - 4 = (x - 4)(ax^2 + bx + c)$.
2. Résoudre alors (E) et (I).

Exercice 40

f est la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{3}{2}x^2 + 4x$.

1. Calculer la dérivée f' de la fonction f, puis sa dérivée seconde f''.
2.
   a Déterminer les variations de la fonction f', et dresser le tableau de variation de f'.

   b Prouver que l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique c et que cette solution appartient à l'intervalle $]-\infty; -1]$. Donner un encadrement de c d'amplitude 10^{-2}.
3.
   a Déterminer le signe de la fonction f', puis dresser le tableau de variation de la fonction f.

   b Montrer que $f(c) = \dfrac{3c(4 - c)}{4}$

   c Déterminer le nombre de racines du polynôme f.

1.6 Positions relatives

Exercice 41 (Position relative de deux courbes)

1. Étudier la position relative de la courbe de la fonction $f : x \mapsto x^2$ et de la droite $y = x + 1$.

   Rerésenter graphiquement la situation.

2. Étudier la position relative des courbes des fonctions $f : x \mapsto \dfrac{x}{x+1}$ et $g : x \mapsto \dfrac{x}{x-1}$.

   Étudier les variations (en précisant les limites et éventuelles asymptotes) de ces fonctions et tracer les deux courbes.

3. Étudier la position relative de la courbe de la fonction $f : x \mapsto e^x$ et de la droite $y = x$.

   Représenter graphiquement la situation.

Exercice 42 (Retour sur la fonction carré et sa parabole)

On considère la fonction carré $f : x \mapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe et T_a la tangente à sa courbe au point d'abscisse a.

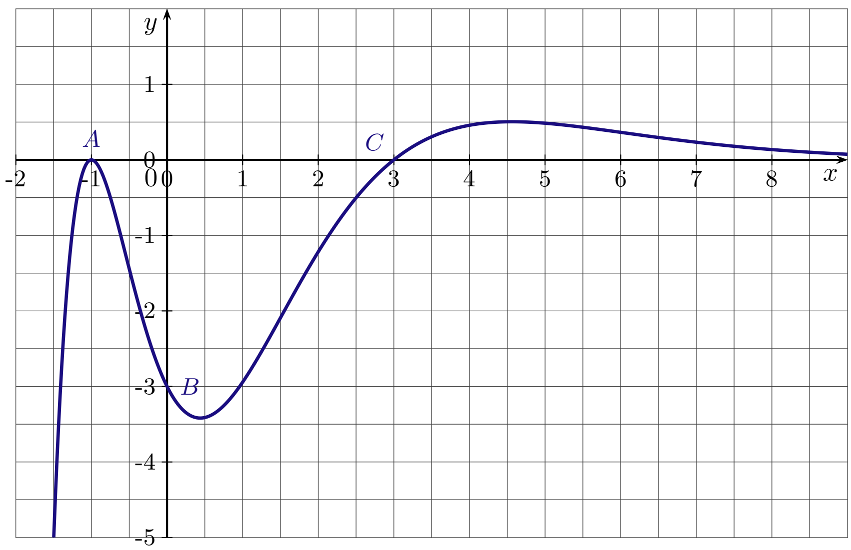
1. Donner l'équation de la tangente T_1 puis étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}$ avec cette tangente.
2. Étudier de même la position relative de la courbe $\mathcal{C}$ avec ses tangentes T_2, T_0, et T_{-1}.
3. Tracer dans un repère la courbe $\mathcal{C}$ et ses tangentes.
4. Généraliser les résultats précédents : montrer que $\mathcal{C}$ est toujours au-dessus de toutes ses tangentes T_a.

2 Convexité

Exercice 43

On considère une fonction f définie sur R et deux fois dérivable. On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction f'', dérivée seconde de la fonction f, dans un repère orthonormé.

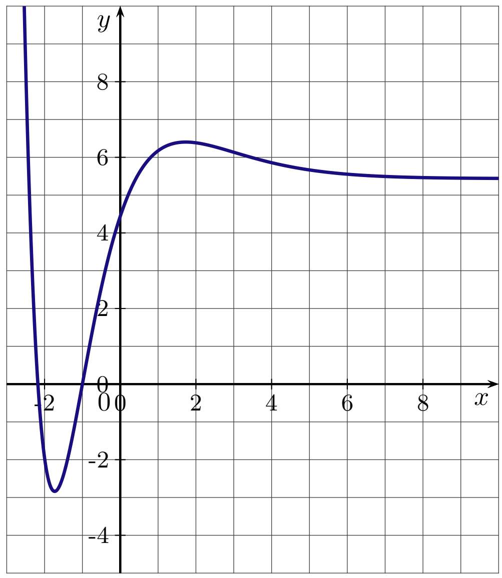
Les points $A(-1;0)$, $B(0;-3)$ et $C(3;0)$ appartiennent à la courbe.



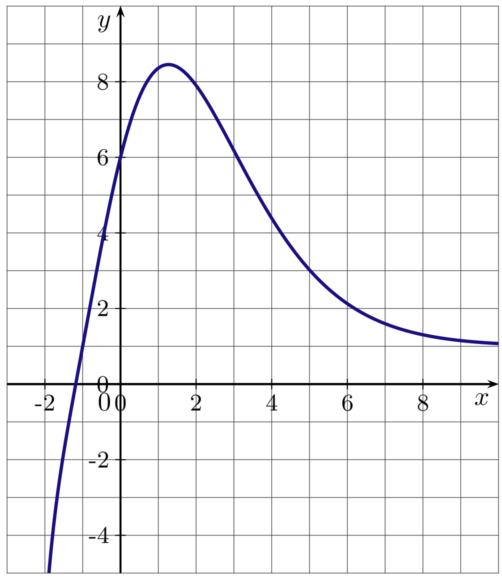
Dans cet exercice, chaque réponse sera justifiée à partir d'arguments graphiques.

1. La courbe représentative de la fonction f admet-elle des points d'inflexion ?
2. Sur quels intervalles, la fonction est-elle convexe ? Est-elle concave ?
3. Parmi les deux courbes données ci-dessous, une seule est la représentation graphique de la fonction f, laquelle ? Justifier la réponse.

Courbe 1

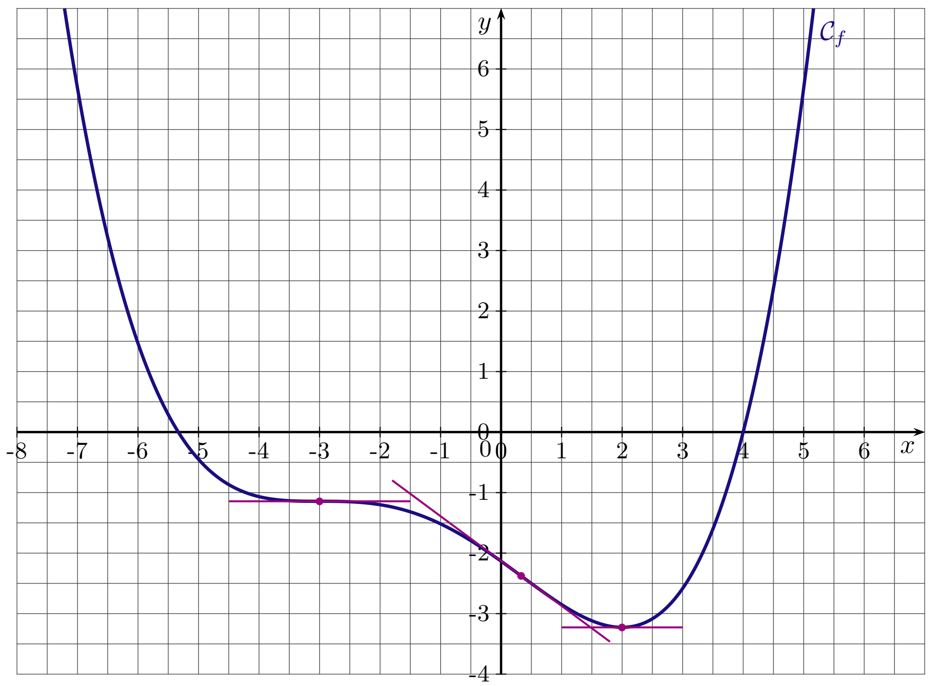


Courbe 2



Exercice 44

Sur le graphique ci-après, on a tracé la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.



On note f' la dérivée de la fonction f et f'' la dérivée seconde de la fonction f.

À partir du graphique, déterminer lequel des trois symboles $<$, $=$ ou $>$ est approprié :

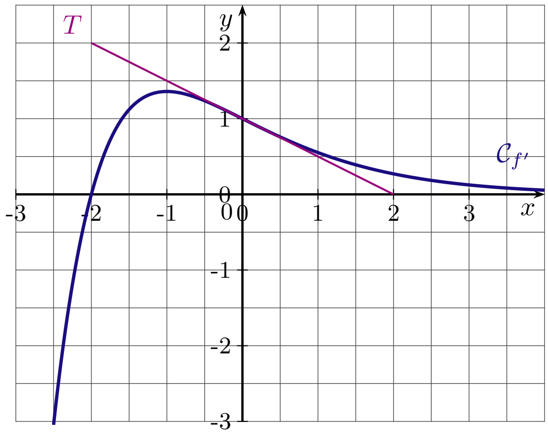
$f(-6)\cdots 0$	$f'(-6)\cdots 0$	$f(-1)\cdots f(3)$	$f'(-1)\cdots f'(3)$
$f'(-6)\cdots f'(-1)$	$f'(-3)\cdots 0$	$f'(2)\cdots 0$	$f'(-7)\cdots f'(3)$
$f''(-6)\cdots f''(-1)$	$f''(-3)\cdots 0$	$f''(2)\cdots 0$	$f''(-1)\cdots f''(1)$

Exercice 45

Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

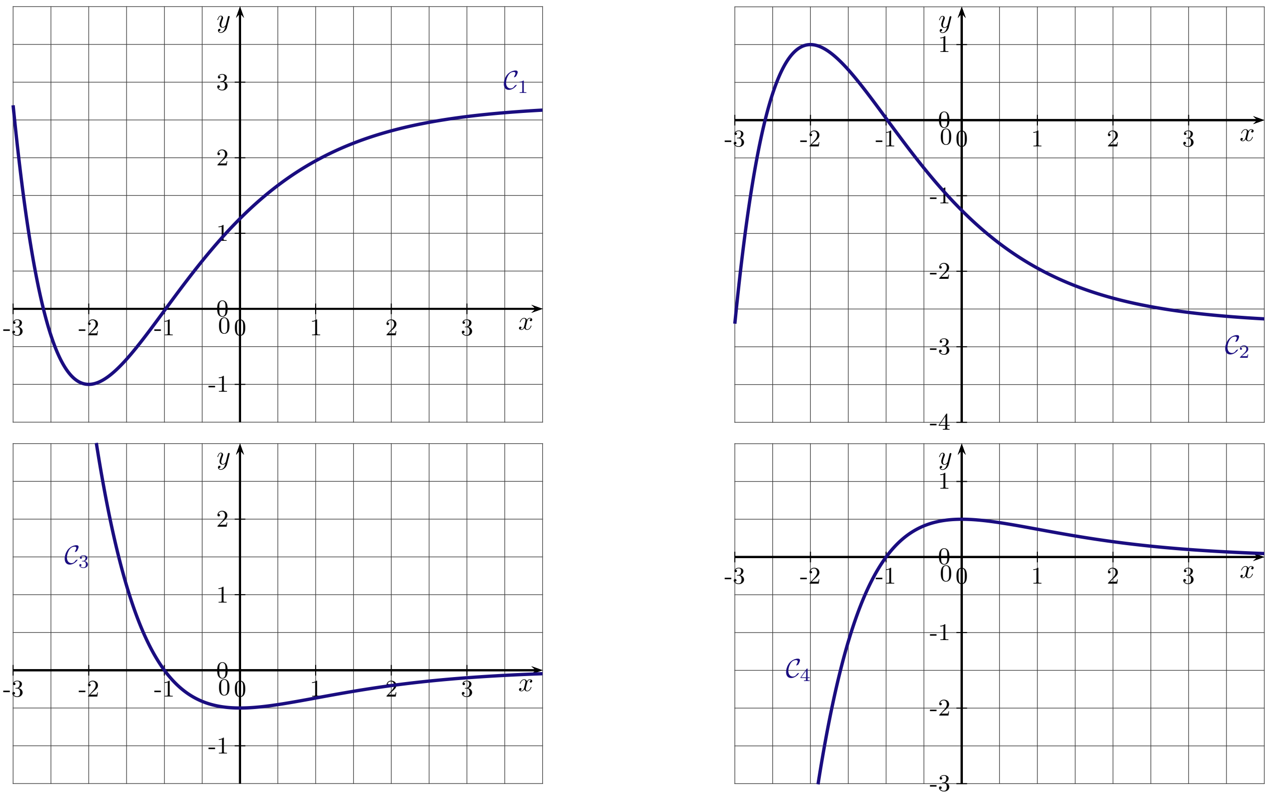
La courbe représentative de la fonction dérivée notée $\mathcal{C}_{f'}$ est donnée ci dessous.

La droite T est tangente à la courbe $\mathcal{C}_{f'}$ au point d'abscisse 0.



1. Par lecture graphique :
   (a) Résoudre $f'(x) = 0$.
   (b) Résoudre $f''(x) = 0$.
   (c) Déterminer $f''(0)$.

2. Une des quatre courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$ ci-dessous est la courbe représentative de la fonction f et une autre la courbe représentative de la dérivée seconde f''.



(a) Déterminer la courbe qui représente f et celle qui représente la dérivée seconde f''.

(b) Déterminer les intervalles sur lesquels f est convexe ou concave.

(c) La courbe représentative de la fonction f admet-elle un point d'inflexion ?

Exercice 46

Le tableau ci-dessous représente l'évolution du taux d'endettement des ménages, en pourcentage du revenu disponible brut, en France de 2001 à 2010.

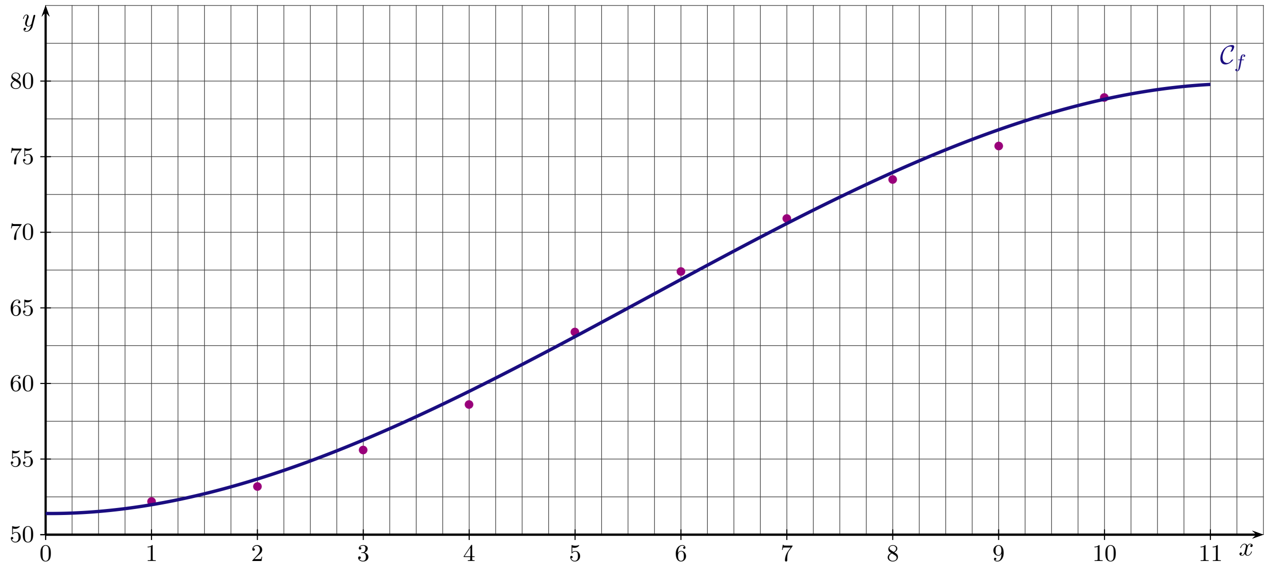
Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Taux d'endettement y_i	52,2	53,2	55,6	58,6	63,4	67,4	70,9	73,5	75,7	78,9

Source : INSEE

Une estimation de l'évolution du taux d'endettement des ménages est modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 11]$ par :

$$f(x) = -0,04x^3 + 0,68x^2 - 0,06x + 51,4$$

où x est le nombre d'années écoulées depuis 2000.



1. (a) Calculer la valeur estimée du taux d'endettement des ménages en 2009.

   (b) Calculer le pourcentage d'erreur par rapport au taux réel d'endettement des ménages en 2009.

2. (a) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

   (b) Déterminer les intervalles sur lesquels f est convexe ou concave.

   (c) La courbe $\mathcal{C}_f$ a-t-elle un point d'inflexion ?

3. Le rythme de croissance instantané du taux d'endettement est assimilé à la dérivée de la fonction f.

   En quelle année, le rythme de croissance du taux d'endettement a-t-il commencé à diminuer ?

Exercice 47

Soit f la fonction définie pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 1}{x^2}$.

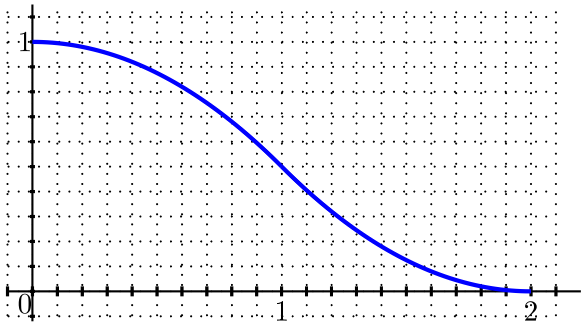
On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

1. Déterminer les coordonnées des points d'intersection éventuels de la courbe $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses.
2. On note f' la dérivée de la fonction f.
   (a) Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{2-x}{x^3}$.
   (b) Donner le tableau des variations de la fonction f.
3. (a) Étudier la convexité de la fonction f.
   (b) La courbe représentative de la fonction f a-t-elle un point d'inflexion ?
4. Montrer que l'équation $f'(x) = \dfrac{1}{2}$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[1;2]$.
   À l'aide de la calculatrice, donner la valeur arrondie à 10^{-2} près, de α.

Exercice 48 (Pente sur un toboggan)

La pente en un point à une courbe est la pente en ce point de sa tangente, ou encore le coefficient directeur de cette tangente.

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x^2}{2} + 1 \text{ si } x \leqslant 1 \\ \dfrac{x^2}{2} - 2x + 2 \text{ si } x \geqslant 1 \end{cases}$$



1. Justifier que f est continue sur $[0;2]$.
2. Donner une expression de la fonction dérivée f' de f. Montrer que f' est aussi continue sur $[0;2]$.
3. Donner la pente à la courbe en 0 et en 2.
4. Donner la pente de la courbe au point d'abscisse x. Comment varie cette pente ? Dresser son tableau de variation.
5. Une norme impose que la pente d'un tel toboggan ne dépasse pas 1,5 en valeur absolue. Est-ce le cas ici ?

Exercice 49

Soit f la fonction exponentielle.

1. Donner la convexité de f.
2. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.
3. En déduire que, pour tout réel x, $e^x > x$.

Exercice 50

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 3x^2 + 0,5x + 1$.

1. Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer les abscisses des éventuels points d'inflexion de la courbe de f.

Exercice 51

Même exercice avec la fonction $g(x) = xe^x$, puis avec la fonction $h(x) = e^{-x^2}$.

Exercice 52

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 4x^3 - 15x^2 - 18x + 12$.

1. Dresser le tableau de variations de f. Préciser les limites.
2. Étudier la convexité de f.
3. Déterminer les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de f.

Exercice 53

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 1 + xe^{-x}$.

1. a Déterminer la dérivée f' de f, puis sa dérivée seconde f''.

   b Étudier le signe de $f''(x)$ sur $\mathbb{R}$. En déduire les variations de f'.

   c En déduire le signe de $f'(x)$ puis les variations de f. Préciser les limites en l'infini.
2. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé et la droite $\mathcal{D} : y = x + 1$.

   a Préciser la position relative de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.

   b Déterminer les coordonnées des éventuels points de $\mathcal{C}$ où la tangente à $\mathcal{C}$ est parallèle à $\mathcal{D}$.

Exercice 54

Soit h la fonction définie par l'expression $h(x) = e^{\sqrt{x^2-5x+6}}$.

1. Préciser l'ensemble $\mathcal{D}_h$ de définition de f.
2. Déterminer la fonction dérivée h' de h.
3. Étudier les variations de h.
4. Déterminer les équations des tangentes T_1 et T_4 à la courbe représentative de h aux points d'abscisses 1 et 4.
5. Déterminer les points d'intersection de T_1 et T_4.

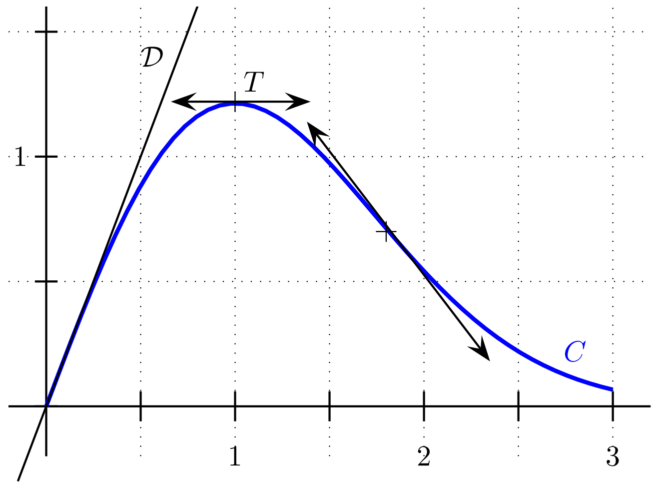
Exercice 55

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $g(x) = \dfrac{e^x}{1-x}$.

1. Déterminer $g'(x)$, puis montrer que g'' a pour expression $g''(x) = \dfrac{e^x\left(x^2 - 4x + 5\right)}{(1-x)^3}$.
2. En déduire la convexité de g et les abscisses des éventuels points d'inflexion.
3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse 0.
4. Montrer que, pour tout $x > 1$, on a $e^x \geqslant -2x^2 + 3x - 1$.

Exercice 56

On donne ci-contre la courbe C représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $[0;3]$. La droite $\mathcal{D}$ est tangente à C au point d'abscisse 0 et passe par le point $A(0,5\,;\,1)$ et par l'origine du repère.
La tangente T à la courbe C au point d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses.



Partie A

1. Déterminer une équation de $\mathcal{D}$.
2. Donner la valeur de $f'(1)$. Justifier.
3. Proposer un intervalle sur lequel f semble concave.

Partie B La fonction f est définie sur $[0;3]$ par l'expression $f(x) = 2xe^{-0{,}5x^2}$.

1. Montrer que, pour tout $x \in [0;3]$, $f'(x) = \left(2 - 2x^2\right) e^{-0{,}5x^2}$.
2. Étudier les variations de f sur $[0;3]$.
3. Déterminer la dérivée seconde de f et étudier sa convexité.

Partie C En Europe, les observateurs d'une maladie nécessitant une hospitalisation considèrent qu'ils peuvent modéliser par cette fonction f l'évolution du nombre de lits occupés par des malades pendant les trois mois d'hiver.
Pour tout x appartenant à l'intervalle $[0;3]$, $f(x)$ représente le nombre de lits occupés, exprimé en million, à l'instant x, exprimé en mois.
Un journal affirme que cet hiver le nombre de lits occupés lors du pic de la maladie a dépassé le million.
Que dire de cette affirmation ?

3 Calculs de limites

Exercice 57 (Calculs de limites en utilisant le nombre dérivé)

En utilisant la définition du nombre dérivé, déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{3x+2} - e^2}{x}$
2. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x}$
3. $\lim_{x\to 1} \dfrac{\ln(2-x)}{x-1}$
4. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\exp(\cos x) - 1}{x - \dfrac{\pi}{2}}$

4 Dérivabilité

Exercice 58

Soit la fonction f définie par l'expression $f(x) = x^2 + 3x - 1$.

Montrer que f est dérivable en $x = 2$ et en déduire $f'(2)$.

Déterminer directement la fonction dérivée f' de f, et retrouver le résultat précédent.

Exercice 59

Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ de mnière à ce que le fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ ax^2 + bx + 1 & \text{sinon .} \end{cases}$

soit dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

Exercice 60

Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}^+$ par $h(x) = \sqrt{x}$.

Montrer que la fonction h n'est pas dérivable en 0. Interpréter graphiquement le résultat précédent.

Exercice 61

Montrer que la fonction $k : x \mapsto \dfrac{x\sqrt{x}}{1+x}$ est dérivable en 0. Que vaut $k'(0)$?

Exercice 62

Étudier la dérivabilité de la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$

Exercice 63 (Dérivable ou pas dérivable)

Les fonctions suivantes sont-elles dérivables en 0 ?

$g(x) = \begin{cases} x\sin(x)\sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$ $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ $h(x) = |x| \sin x.$

Exercice 64 (C^1 ou pas C^1 ?)

Étudier si les fonctions suivantes sont dérivables et C^1 sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Exercice 65

1. Déterminer les réels a et b tels que la fonction f définie ci-dessous soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ ax + b & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

2. Déterminer les réels a, b et c tels que la fonction f définie ci-dessous soit de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ ax^2 + bx + c & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Exercice 66 (Un problème de tangente)

Démontrer que les courbes d'équation $y = x^2$ et $y = 1/x$ admettent une unique tangente commune.

5 Théorème des accroissements finis

Exercice 67 (Erreur commise)

Utiliser le théorème des accroissements finis pour donner un majorant des réels suivants.

1. $\sqrt{10001} - 100$
2. $\frac{1}{0,999^2} - 1$
3. $0,001 - \dfrac{1}{1003}$
4. $\sin(3,14)$
5. $1 - \cos(0,002)$
6. $1 - \sin(1,57)$
7. $\ln(1,001)$
8. $\ln(2,72) - 1$
9. $e^0,002 - 1$
10. $\cos 1 - \frac{1}{2}$

Exercice 68

À l'aide du théorème des accroissements finis démontrer les inégalités suivantes :

1. Pour tout réels x on a $e^x \geq 1 + x$
2. Pour tout $x > 1$ on a $\ln(1+x) \leq x$

6 Dérivabilité à gauche et à droite

Exercice 69

Pour chacune des fonctions f définie sur un segment $[a,b]$:

1. Démontrer que f est dérivable sur $]a,b[$.
2. La fonction est-elle dérivable à droite en a ?
3. La fonction est-elle dérivable à gauche en a ?

$f(x) = \sqrt{x(1-x)}$ sur $[0;1]$

$f(x) = \sqrt{(1-x^2)(1-x)}$ sur $[-1;1]$

$f(x) = \sqrt{x\sin(x)(1-\sin(x))}$ sur $[0;\dfrac{\pi}{2}]$

$f(x) = \sqrt{(1-\cos(x))(1-\sin(x))}$ sur $[0;\dfrac{\pi}{2}]$

7 Calculs de dériées n-ième

Exercice 70 (Premier calcul)

Calculer la dérivée n-ième de la fonction $f(x) = (x^3 + 2x - 7)e^x$, pour $n \geq 3$.

Exercice 71 (Quelques calculs)

Calculer la dérivée n-ième des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto x\exp(x)$
2. $x \mapsto x^2 \sin x$
3. $x \mapsto x^{n-1}\ln(1+x)$