Sommaire

1 Primitive d'une fonction

Exercice 1

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

$f(x) = 3x^2 + x - 6$ $\quad g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ $\quad h(x) = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$ $\quad k(x) = 2x + \sin(x)$

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $I = [0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3x^2+6x+4}{(x+1)^2}$.

1. Vérifier que la fonction F définie sur I par $F(x) = \dfrac{3x^2+4x}{x+1}$ est une primitive de f sur I.
2. La fonction G définie sur I par $G(x) = \dfrac{3x^2-x-5}{x+1}$ est-elle une autre primitive de f sur I ?

Exercice 3

1. Déterminer la primitive F de $f : x \mapsto x^2 - 4x + 2$ telle que $F(1) = 0$.
2. Déterminer la primitive G de $g : x \mapsto 12x^5 - 9x^2 + 6x - 3$ telle que $G(0) = 4$.
3. Déterminer la primitive H de $h : x \mapsto \dfrac{4}{(2x+1)^2}$ telle que $H\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2$.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression $f(x) = 4x - 3$.

Déterminer de façon explicite, pour tout réel $t \geq 1$, la fonction $F(t) = \displaystyle\int_1^t f(x)\,dx$.

Exercice 5

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

1. $f(x) = x^4 - 4x^3 - 5x^2 + \dfrac{7}{3}x$
2. $f(x) = -\sin(x) + 2\cos(x)$
3. $f(x) = 2x - 4 + \dfrac{3}{x^2}$

Exercice 6 (Reconnaissance de formes)

Déterminer toutes les primitives des fonctions suivantes :

$f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ $\quad h(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ $\quad l(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$

$g(x) = \dfrac{e^{3x}}{1+e^{3x}}$ $\quad k(x) = \cos(x)\sin^2(x)$ $\quad m(x) = 3x\sqrt{1+x^2}$

Exercice 7 (Fraction rationnelle avec décomposition en éléments simples)

Soit $f(x) = \dfrac{5x^2+21x+22}{(x-1)(x+3)^2}$, $x \in]1, +\infty[$.

1. Démontrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que $\forall x \in]1, +\infty[,\ f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3} + \frac{c}{(x+3)^2}$.
2. En déduire la primitive de f sur $]1, +\infty[$ qui s'annule en 2.

Exercice 8 (Primitive de fractions rationnelles)

Déterminer une primitive des fractions rationnelles suivantes :

1. Soit $f(x) = \dfrac{2x^2-3x+4}{(x-1)^2}$ sur $]1, +\infty[$
   (a) Déterminer trois réels a, b et c tels que $f(x) = a + \dfrac{b}{x-1} + \dfrac{c}{(x-1)^2}$
   (b) Déterminer une primitive de f.
2. Soit $f(x) = \dfrac{2x-1}{(x+1)^2}$ sur $]-1, +\infty[$
   (a) Déterminer deux réels a, b tels que $f(x) = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{(x+1)^2}$
   (b) Déterminer une primitive de f.
3. Déterminer une primitive de $f(x) = \dfrac{x}{(x^2-4)^2}$ sur $]2, +\infty[$
4. Soit $f(x) = \dfrac{24x^3+18x^2+10x-9}{(3x-1)(2x+1)^2}$ sur $]-1/2, 1/3[$
   (a) Déterminer quatre réels a, b, c et d tels que $f(x) = a + \dfrac{b}{3x-1} + \dfrac{c}{2x+1} + \dfrac{d}{(2x+1)^2}$
   (b) Déterminer une primitive de f.
5. Déterminer une primitive de $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x-3}$

Exercice 9

Donner une primitive des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \sin^5 x$ $\quad$ **2.** $x \mapsto \cos^4(x)\sin^2(x)$ $\quad$ **3.** $x \mapsto \cos(3x)\cos^3 x$

2 Propriétés de l'intégrale

Exercice 10

1. Démontrer que pour tout réel t de $[0;1]$, on a $\dfrac{t}{1+t^2} \leq t$.
2. En déduire que $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,dt \leq \frac{1}{2}$.

Exercice 11

f est la fonction définie sur $[1;2]$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2}$.

1. Étudier les variations de f sur $[1;2]$.
2. Démontrer que pour tout x de $[1;2]$, $\quad \dfrac{e^2}{4} \leqslant \dfrac{e^x}{x^2} \leqslant e$.
3. En déduire un encadrement de $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^x}{x^2}\,dx$.

Exercice 12

Soit f définie sur $[-3;3]$ par $f(x) = E(x^2)$ où E désigne la fonction partie entière.

1. Montrer que f est une fonction paire, et tracer sa représentation graphique sur l'intervalle $[0;3]$.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,dx$. En déduire $\displaystyle\int_{-3}^3 f(x)\,dx$.

3 Intégrales et primitives

Exercice 13

Soit F la fonction définie par $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$.

Déterminer le sens de variation de F.

Exercice 14

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression $f(x) = 2x+1$.

Déterminer de façon explicite, pour tout réel $t \geq 0$, la fonction $F(t) = \displaystyle\int_0^t f(x)\,dx$.

Exercice 15

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2x}{2x^2+1}$.

Déterminer une expression de la fonction F définie par $F(t) = \displaystyle\int_0^t f(x)\,dx$.

Exercice 16

1. On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = 1 - 2\ln x$. On note $\mathcal{C}_g$ sa courbe représentative.

   a La courbe $\mathcal{C}_g$ coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse α.

   Déterminer la valeur exacte du réel α.

   b Calculer la fonction dérivée g' de g et dresser le tableau de variation de g.

   c Déduire de ce qui précède le signe de $g(x)$ pour $x > 0$.

2. Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2\ln x + 1}{x}$.

3. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

4. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \dfrac{f(x)}{x^2}$.

   En déduire le sens de variation de f.

5. (a) Déterminer une primitive F de la fonction f sur $]0;+\infty[$.

   (Indication : on pourra écrire $f(x) = 2 \times \dfrac{1}{x} \times \ln x + \dfrac{1}{x}$*).*

   (b) Soit $I = \displaystyle\int_1^5 f(x)\,dx$. Calculer I, et en donner une valeur approchée au centième

4 Calcul d'intégrale

Exercice 17

Pour chaque affirmation proposée, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier.

Soit f une fonction continue et positive sur $[0;+\infty[$, et soit F et G les fonctions définies $[0;+\infty[$ par $F(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\,dt$ et $G(x) = x\displaystyle\int_1^x f(t)\,dt$. Soit de plus $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère.

1. $G(0) = G(1)$

2. G est dérivable sur $[0;+\infty[$, et pour tout $x \in [0;+\infty[$, $G'(x) = F(x) + xf(x)$.

3. On ne peut pas prévoir le sens de variation de G avec les seules informations de l'énoncé.

4. L'aire de la surface délimitée par les droites d'équations $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ et la courbe $\mathcal{C}_f$ se calcule par $F(2) + F(0)$.

Exercice 18

Calculer les intégrales $I = \displaystyle\int_1^3 (2x-1)\,dx$ et $J = \displaystyle\int_{-1}^1 (-2t+3)\,dt$.

Exercice 19

Calculer les intégrales suivantes : $I = \displaystyle\int_0^1 x\,dx$, $J = \displaystyle\int_1^3 (2t+1)\,dt$, et $K = \displaystyle\int_{-2}^3 |x|\,dx$.

Exercice 20

Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^4 E(x)\,dx$, où $E(x)$ désigne la partie entière de x.

Exercice 21

Soit f la fonction définie sur $I = [0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3x^2+6x+4}{(x+1)^2}$.

1. Vérifier que la fonction F définie sur I par $F(x) = \dfrac{3x^2+4x}{x+1}$ est une primitive de f sur I.
2. En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

Exercice 22

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x\ln x - x$.

1. Déterminer la fonction dérivée f' de f.
2. En déduire l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^e \ln x\,dx$.

Exercice 23

1. Montrer que la fonction F définie sur $]0; +\infty[$ par $F(x) = \dfrac{1}{2}x^2\ln x - \dfrac{1}{4}x^2$ est une primitive de la fonction $f : x \mapsto x\ln x$.
2. En déduire $\displaystyle\int_1^{\sqrt{e}} x\ln x\,dx$.

Exercice 24

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = (2t+1)e^{-t}$.

1. Vérifier que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(t) = (-2t-3)e^{-t}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer la valeur exacte de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$.
3. On définie la fonction G pour $x \geqslant 0$ par $G(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.
   (a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   (b) Dresser le tableau de variation de la fonction f.
   (c) Tracer dans un repère l'allure de la courbe représentative de la fonction f, et interpréter à l'aide de ce graphique la valeur $G(x)$ pour un nombre $x \geqslant 0$.
   (d) Déterminer la limite de G en $+\infty$.

Exercice 25

Calculer les intégrales : $I = \displaystyle\int_0^2 2x\,dx$, $J = \displaystyle\int_1^3 (2x-1)\,dx$, $K = \displaystyle\int_{-1}^1 (2t+3)\,dt$, $L = \displaystyle\int_0^2 x^2\,dx$, $M = \displaystyle\int_0^1 e^x\,dx$, $N = \displaystyle\int_2^4 \frac{1}{x+1}\,dx$ et $P = \displaystyle\int_0^\pi \cos x\,dx$.

Exercice 26

Déterminer les intégrales suivantes :

1. $I = \displaystyle\int_0^1 x^2(x^3-1)^5\, dx$
2. $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x^2-4)^2}\, dx$
3. $K = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{3x}{\sqrt{1-x^2}}$
4. $L_n = \displaystyle\int_1^n \frac{1}{x^2}\, e^{\frac{1}{x}}\, dx$ puis $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} L_n$

Exercice 27

Calculer $I = \displaystyle\int_1^2 \left(x^3 + \frac{2}{x}\right) dx$ et $J = \displaystyle\int_1^2 \left(\frac{3}{x^2} - \frac{2}{2x+1}\right) dx$

Exercice 28

Calculer les intégrales :

a) $I = \displaystyle\int_{-1}^1 \left(x^3 + x^2 + x\right)\, dx$

b) $I = \displaystyle\int_2^5 3\, dx$

c) $I = \displaystyle\int_0^3 dx$

d) $I = \displaystyle\int_{-1}^1 2r^3\, dr$

e) $I = \displaystyle\int_0^1 (2x+1)^3\, dx$

f) $I = \displaystyle\int_0^2 \frac{1}{(2x+1)^2}\, dx$

g) $I = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{(x+3)^2} - \frac{1}{(2x+3)^2}\right) dx$

h) $I = \displaystyle\int_1^2 \left(x + 1 + \frac{1}{x+1}\right) dx$

i) $I = \displaystyle\int_1^3 \left(x - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right) dx$

k) $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+2x+3}\, dx$

l) $I = \displaystyle\int_1^e \frac{1}{x} \ln x\, dx$

m) $I = \displaystyle\int_{-1}^1 (2e^x + 1)\, dx$

n) $I = \displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3} e^{2x}\, dx$

p) $I = \displaystyle\int_0^1 \left(e^x - e^{-x}\right)\, dx$

q) $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\cos x - \sin x)\, dx$

r) $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos(2x)\, dx$

s) $I = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos\left(3t + \frac{\pi}{6}\right) dx$

t) $I = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\sin x}\, dx$

Exercice 29 (Intégrale d'une fraction rationnelle avec décomposition en éléments simples)

1. Démontrer qu'il existe deux réels a et b tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$,

$$\frac{x}{x+1} = a + \frac{b}{x+1}.$$

2. En déduire la valeur de $\int_1^2 \frac{x}{x+1} dx$.

Exercice 30

Soit f la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4x-2}{x^2-1}$.

1. Vérifier que, pour tout x de $]1;+\infty[$, on a $f(x) = \dfrac{3}{x+1} + \dfrac{1}{x-1}$.
2. En déduire la valeur de l'intégrale $I = \displaystyle\int_2^4 \frac{4x-2}{x^2-1}$.

Exercice 31

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression $f(x) = \dfrac{e^x-1}{e^x+1}$.

Déterminer deux nombres réels a et b tels que, pour tout réel x, $f(x) = a + \dfrac{be^x}{1+e^x}$.

En déduire $\displaystyle\int_0^2 f(x)\, dx$.

4.1 Valeur moyenne

Exercice 32

Calculer la valeur moyenne de chaque fonction sur l'intervalle donné :

$f(x) = (2-x)(x-1)$ sur $I = [-1;0]$ $g(x) = e^{-3x+1}$ sur $I = [-1;1]$

Exercice 33 (Hauteur moyenne)

La hauteur, en métres, d'une ligne électrique de 160m peut être modélisée par la fonction h définie sur $[-80;80]$ par $h(x) = 10\left(e^{x/40} + e^{-x/40}\right)$. Quelle est la hauteur moyenne de cette ligne électrique ?

Exercice 34

Calculer la valeur moyenne de chaque fonction sur l'intervalle donné :

a) $f(x) = x^2$ sur $[0;1]$ b) $g(x) = (2-x)(x-1)$ sur $[-1;0]$ c) $h(x) = e^x$ sur $[0;1]$

d) $k(x) = e^{-3x+1}$ sur $[-1;1]$ e) $l(x) = \dfrac{2}{3x+1}$ sur $[0;3]$ f) $m(x) = \dfrac{5}{(2x+3)^2}$ sur $[0;1]$

Exercice 35

Une tension alternative est donnée, en fonction du temps, par $u(t) = 283\cos(\omega t)$, avec la pulsation $\omega = 2\pi f$ et la fréquence $f = 50$ hertz.

1. Calculer la valeur moyenne de la tension sur une demi-période : sur $[0;0,01]$.
2. Calculer la tension efficace, notée $\hat{U}$, est définie comme la valeur moyenne sur une période de $(u(t))^2$.

4.2 Étude de suite

Exercice 36

On considère la fonction f définie sur $[0;1]$ par $f(x) = e^{-x^2}$ et on définit la suite (u_n) par :

$$u_0 = \int_0^1 f(x)\,dx \quad \text{et, pour tout entier } n \geqslant 1, \quad u_n = \int_0^1 x^n f(x)\,dx$$

1. a Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0;1]$, $\dfrac{1}{e} \leqslant f(x) \leqslant 1$.

   b En déduire que $\dfrac{1}{e} \leqslant u_0 \leqslant 1$.
2. Calculer u_1.
3. a Démontrer que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n$.

   b Étudier les variations de la suite (u_n).

   En déduire que la suite (u_n) est convergente.
4. a Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

   b En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 37

On considère la suite numérique (J_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par : $J_n = \int_1^n e^{-t}\sqrt{1+t}\,dt$.

1. Démontrer que la suite (J_n) est croissante.
2. On définit la suite (I_n), pour tout entier naturel n non nul, par : $I_n = \displaystyle\int_1^n (t+1)\,e^{-t}\,dt$.

   a Justifier que, pour tout $t \geqslant 1$, on a $\sqrt{t+1} \leqslant t+1$.

   b En déduire que $J_n \leqslant I_n$.

   c Déterminer deux réels a et b tels que la fonction $t \mapsto (at+b)e^{-t}$ soit une primitive de la fonction $t \mapsto (t+1)e^{-t}$.

   Exprimer alors I_n en fonction de n.

   d En déduire que la suite (J_n) est majorée par un nombre réel.

   e Que peut-on en conclure pour la suite (J_n) ?

4.3 Intégration par parties

Exercice 38 (Reconnaissance de formes)

Déterminer une primitive des fonctions suivantes sur l'intervalle considéré :

1. $f(x) = (3x-1)(3x^2-2x+3)^3,\ I = \mathbb{R}$
2. $f(x) = \dfrac{1-x^2}{(x^3-3x+1)^3},\ I =]-\infty, -2[$
3. $f(x) = \dfrac{(x-1)}{\sqrt{x(x-2)}},\ I =]-\infty, 0[$
4. $f(x) = \dfrac{1}{x\ln(x^2)},\ I =]1, +\infty[$

Exercice 39

Calculer les intégrales suivantes : 1. $I = \displaystyle\int_0^1 xe^x\,dx$ 2. $K = \displaystyle\int_0^1 \frac{x\ln x}{(x^2+1)^2}\,dx$

Exercice 40

Calculer l'intégrale suivante : $I = \displaystyle\int_0^x t^2e^t\,dt$.

Plus généralement donner une méthode permettant de calculer les primitives de fonctions de la forme $t \longmapsto p(t)e^t$ où p est un polynôme

Exercice 41

Calculer l'intégrale suivante : $I = \displaystyle\int_0^x t^2\sin(t)\,dt$.

Plus généralement donner une méthode permettant de calculer les primitives de fonctions de la forme $t \longmapsto p(t)\sin(t)$ ou $t \longmapsto p(t)\cos(t)$ où p est un polynôme

Exercice 42 (Fraction rationnelle puis intégration par parties)

On considère la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x(x+1)}$.

1. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $x \in [1,2]$, on a : $f(x) = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1}$.
2. Déduire de la question précédente la valeur de l'intégrale $J = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x$.
3. Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 43

Calculer les intégrales suivantes :

1. $I = \int_0^{\pi} x\sin(x)dx$
2. $J = \int_3^3 \frac{x}{\sqrt{2x-3}}dx$
3. $K = \int_0^3 xe^x\,dx$
4. $L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(2x)dx$
5. $M = \int_0^{\pi} (2-2x)\sin(x))\,dx$

Exercice 44

I et J sont les intégrales définies par $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin(x)\,dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos(x)\,dx$.

1. En appliquant de deux façons différentes à l'intégrale I la méthode d'intégration par parties, trouver deux relation entre I et J.
2. Calculer alors les intégrales I et J.

Exercice 45

Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \int_0^{\pi} x^2\cos(nx)\,dx$. À l'aide d'une double intégration par parties, calculer I_n en fonction de n.

Exercice 46

Soit I la suite définie pour tout entier $n \geq 1$ par $I_n = \int_0^1 t^n\,e^{-t}\,dt$.

1. Calcul des premiers termes de la suite
   a Calculer $I_1 = \int_0^1 te^{-t}dt$ à l'aide d'une intégration par parties.
   b Avec la méthode d'intégration par parties, exprimer I_2 en fonction de I_1. En déduire I_2.
   c Exprimer I_3 en fonction de I_2, puis calculer I_3.
2. Étude de la suite
   a) Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $I_n \geq 0$.
   b) Étudier le sens de variation de la suite I.
   c) Démontrer que la suite I est convergente.
3. Calcul de la limite de la suite
   a À l'aide d'une intégration par parties, exprimer I_{n+1} en fonction de I_n.
   b Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $I_n \leq \frac{1}{ne}$.
   c En déduire la limite de la suite I.

Exercice 47

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^1 e^x(2x^3+3x^2-x+1)\,dx$
2. $\int_0^{2\pi} e^{-x}\sin^2(x)\,dx$

4.4 Changement de variables

Exercice 48 (Changements de variables - Recherche de primitives)

En effectuant un changement de variables, donner une primitive des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$
2. $x \mapsto \cos(\sqrt{x})$

Exercice 49

En effectuant le changement de variable indiqué, calculer

1. $\displaystyle\int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\,dt$ en posant $u = \sqrt{t}$.
2. $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^x}{1+e^x}dx$ en posant $u = \mathrm{e}^x$.
3. $\displaystyle\int_e^{e^3} \frac{1}{x\ln(x)}dx$ en posant $x = \mathrm{e}^t$.
4. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3(t)\sin^2(t)\,dt$ en posant $u = \sin(t)$.

Exercice 50

En effectuant le changement de variable indiqué puis une intégration par partie, calculer $\displaystyle\int_0^1 e^{\sqrt{t}}\,dt$ en posant $u = \sqrt{t}$.

Exercice 51

En effectuant un changement de variables, calculer $\displaystyle\int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x}dx,\ n \in \mathbb{N}$

Exercice 52 (Fonction avec un axe de symétrie)

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue telle que, pour tout $x \in [a, b]$, on a $f(a + b - x) = f(x)$. Montrer que

$$\int_a^b xf(x)dx = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx.$$

4.5 Calculs d'aire et de volumes

4.5.1 Calculs d'aires

Exercice 53

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x$. Représenter $\mathcal{C}_f$ et calculer $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$.

Exercice 54

Soit la fonction f définie par $f(x) = 3x^2 - 4$. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$.

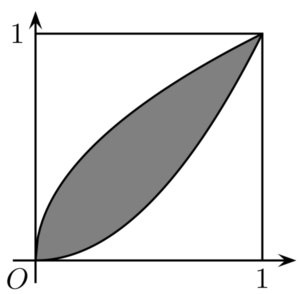
Représenter l'allure de la courbe représentative de f et interpréter graphiquement le résultat précédent.

Exercice 55

Dans un repère orthonormé, on considère le domaine $\mathcal{D}$ compris entre les courbes d'équations $y = \sqrt{x}$ et $y = x^2$.

Déterminer l'aire du domaine $\mathcal{D}$.

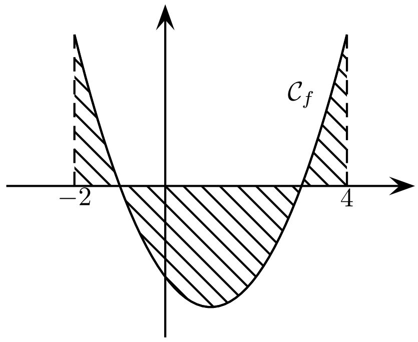
On pourra se rappeler que $\sqrt{x} = x^{1/2}$)



Exercice 56

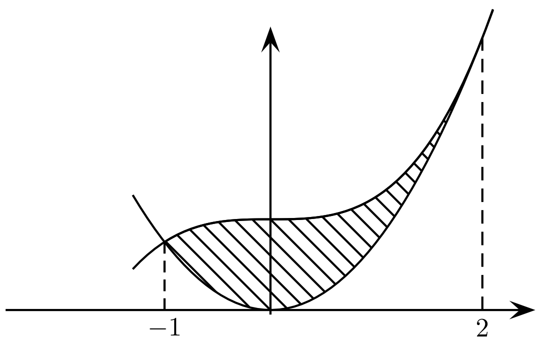
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x - 3$, et on note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Donner le tableau de signes de $f(x)$.
2. Calculer l'aire du domaine hachuré sur la figure ci-contre.



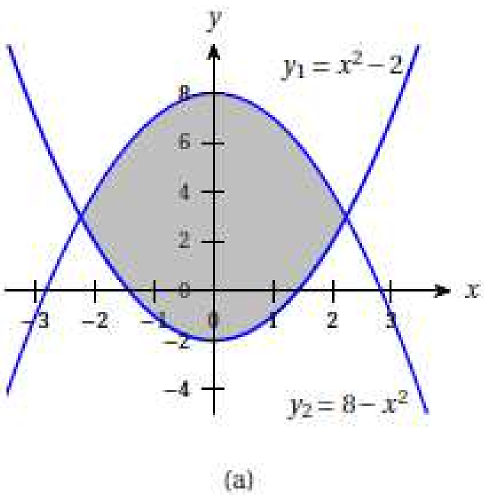
Exercice 57

Calculer l'aire du domaine, hachuré sur la figure ci-contre, délimité par les courbes représentatives des fonctions f et g définies par $f(x) = x^3 + 4$ et $g(x) = 3x^2$.

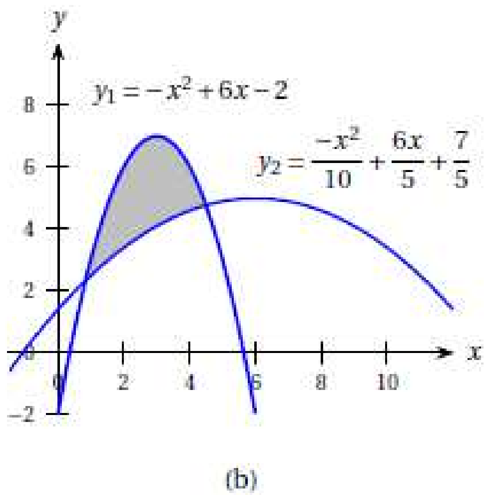


Exercice 58

Calculez l'aire des régions ombrées suivantes.



(a)



(b)

Exercice 59

Calculez l'aire de la (ou des) région(s) délimitée(s) par les courbes :

1. $y + x^2 = 6$ et $y + 2x = 3$
2. $y = 3 + x$ et $x + y^2 = 3$
3. $y = x^2 - x$ et $y = x^3 - 4x^2 + 3x$

Exercice 60

Soit R la région qui est bornée par les courbes $y = x^2$ et $y = x + 2$.

1. Déterminez le nombre a tel que la droite $x = a$ divise la région R en deux régions de même aire.
2. (Difficile) Déterminez le nombre b tel que la droite $y = b$ divise la région en deux régions de même aire.

Exercice 61 (Aire de la surface comprise entre deux courbes)

Soit f et g les fonctions définies sur $[0; 1]$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ et $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. On munit le plan d'un repère orthonormé $(O; I; J)$ tel que $OI = 5\text{cm}$.

1. Représenter les courbes représentatives de f et de g dans ce repère. En particulier, on étudiera leurs positions relatives.
2. Déterminer l'aire, en unités d'aires, de la surface $\mathcal{S}$ comprise entre les deux courbes et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.
3. En déduire l'aire de $\mathcal{S}$ en cm^2.

4.5.2 Calculs de volumes

Exercice 62

Soit R la région du premier quadrant délimitée par la parabole d'équation $y = 4 - \dfrac{4x^2}{9}$ et S le solide engendré par la révolution de R autour de l'axe des x.

1. Illustrez la région R et le solide S.
2. Si l'on calcule le volume de S à l'aide de la méthode des disques, les disques seront-ils horizontaux ou verticaux ?
3. Calculez le volume du solide S.

Exercice 63

Dessinez la région R délimitée par les courbes $y = x^2$ et $y = 4$ et trouvez le volume du solide engendré par la rotation de R autour de la droite d'équation donnée.

1. $y = 4$
2. $y = 5$

Exercice 64

Calculez le volume du solide engendré par la révolution autour de l'axe $y = 7$ de la région R délimitée par les courbes $y = x + 3$ et $y = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{3}{2}$.
Faites d'abord un dessin de la région.

Exercice 65

Calculez le volume du solide engendré par la révolution de la région donnée autour de l'axe mentionné.

1. Région bornée par $y = 1 - x$, $y = x - 1$ et l'axe des y. Axe de rotation : $y = 1$
2. Région bornée par $y = \dfrac{1}{x}$, l'axe des x et situé à droite de $x = 1$ et à gauche de $x = 10$. Axe de rotation : l'axe des x.

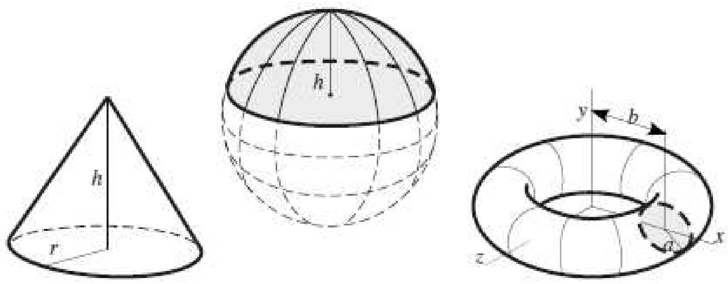
3. Région bornée par $y = x^2 - 4$, et l'axe des x. Axe de rotation : l'axe des x.

4. (Difficile) Région bornée par : $y = \sqrt{x}$, l'axe des y et $y = 1$. Axe de rotation : l'axe des y.

Exercice 66

Déterminez, en utilisant une (ou des) intégrale(s) définie(s), le volume du solide décrit ci-dessous

1. Un cône circulaire droit de rayon r et de hauteur h.
2. Une sphère de rayon r .
3. Une calotte de hauteur h d'une sphère de rayon r .
4. Un tore obtenu en faisant tourner un disque de rayon a centré en $(b; 0)$ (avec $a < b$) autour de l'axe des y.



4.5.3 Longueur d'arc

Exercice 67 (Longueur d'une chaînette)

Une chaînette est la courbe suivant laquelle se tend un fil homogène suspendu par ses extrémités à deux points fixes.

On admet que que la chaînette est la courbe représentative de la fonction f définie sur $[-1; 1]$ par $f(x) = \dfrac{e^{2x} + e^{-2x}}{4}$.

1. a Calculer la fonction dérivée f' de f.

   b Étudier alors le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f.

   c Tracer l'allure de la chaînette.

2. On admet que la longueur L de la chaînette (déformée et étirée sous l'action de son poids) est égale à l'intégrale $L = \displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$.

   (a) En les calculant séparemment, montrer que les deux expressions $1 + [f'(x)]^2$ et $[2f(x)]^2$ sont égales.

   (b) En déduire la longueur L de la cahînette.