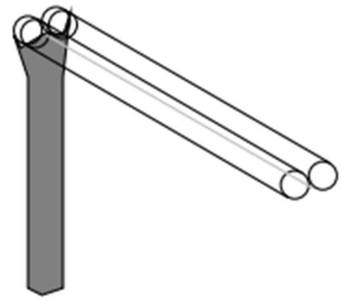
Brevet de technicien supérieur Métropole–Antilles–Guyane
14 mai 2018 - groupement B

Exercice 1 **10 points**

Plusieurs projets de train à très haute vitesse et à propulsion électromagnétique sont en préparation, à l'image de l'Hyperloop.
Les wagons ont une forme cylindrique et sont propulsés dans un tube à basse pression afin de réduire les frottements.
Les ingénieurs ont fixé comme objectif impératif pour le départ de chaque wagon d'atteindre en moins de 2 minutes une vitesse instantanée de 400 km.h^{-1}.



On note $f(t)$ la distance parcourue par le wagon, en km, à l'instant t en minute. On suppose que f est une fonction de la variable t définie et dérivable sur l'intervalle $[0; 3]$.

L'objectif de cet exercice est d'étudier la fonction f afin de vérifier les caractéristiques du départ.

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante

A. Résolution d'une équation différentielle

En appliquant les contraintes physiques et technologiques du projet, de premiers résultats conduisent à l'équation différentielle (E) :

$$y' - 0,2y = 3t,$$

où y est une fonction inconnue de la variable réelle t, définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ et y' la fonction dérivée de y.

1. Résoudre sur $[0\ ;\ +\infty[$ l'équation différentielle (E_0) :

$$y' - 0,2y = 0.$$

   On fournit les formules suivantes :

Équation différentielle	Solutions sur un intervalle I
$y' + ay = 0$	$y(t) = ke^{-at}$

2. Vérifier que la fonction g, définie sur $[0; 3]$ par $g(t) = -15t - 75$, est une solution de l'équation différentielle (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Au temps $t = 0$, le wagon est au point de départ. Déterminer la fonction f solution de (E) vérifiant la condition initiale $f(0) = 0$.

B. Étude de fonction et application

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;3]$ par

$$f(t) = 75\left(e^{0,2t} - 1\right) - 15t.$$

On désigne par $\mathcal{C}$ la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. Un logiciel de calcul formel fournit ci-dessous des expressions de $f(t)$ et de $f'(t)$.
Ces résultats sont admis et peuvent être exploités dans les questions suivantes.

▷ Calcul formel	
1	$f(t) := 75 * (\exp(0.2 * t) - 1) - 15 * t$
•	$\to f(t) := 75e^{\frac{1}{5}t} - 15t - 75$
2	$f'(t)$
○	$\to 15e^{\frac{1}{5}t} - 15$

a. Résoudre sur l'intervalle $[0\,;3]$ l'inéquation $f'(t) \geqslant 0$.

b. En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;3]$.

2. On rappelle que $f(t)$ correspond à la distance parcourue par le wagon, en km, à l'instant t, en minute.
Déterminer le nombre de kilomètres parcourus au bout d'une minute. Arrondir le résultat au dixième.

3. **a.** La vitesse du wagon, en kilomètre par minute, à l'instant t, correspond à $f'(t)$.
En déduire la vitesse, en kilomètre par minute, du wagon à $t = 2$ minutes. Arrondir le résultat au dixième.

b. L'objectif des ingénieurs est-il atteint ? Justifier la réponse.

4. *Cette question est une question à choix multiples. Une seule réponse est exacte.*
Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification.
La réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

Une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 2 est :

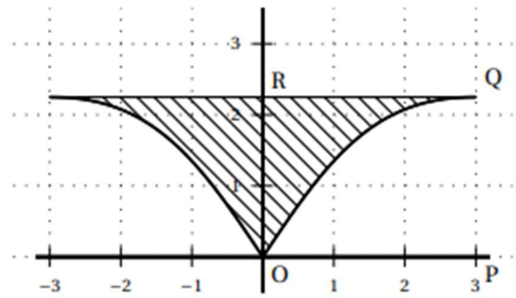
$y = 15\left(e^{0,4} - 1\right)t$	$y = 15\left(e^{0,4} - 1\right)t + 45e^{0,4}$	$y = 15\left(e^{0,4} - 1\right)t + 45e^{0,4} - 75$

On fournit la formule suivante :

Une équation de la tangente au point d'abscisse a de la courbe représentative de f est : $y = f'(a)(t-a) + f(a)$.

C. Calcul intégral

Afin d'aménager les futures gares dédiées à ce train à très haute vitesse, les architectes ont dessiné la pièce suivante, représentée dans un repère orthonormé avec pour unité graphique 1 mètre sur les deux axes.



On désire calculer de façon précise l'aire $\mathscr{A}$ de la surface hachurée sur le dessin. Pour cela on dispose des données suivantes :

— la pièce est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées;

— le bord supérieur correspond à la droite d'équation $y = 2,25$;

— le bord inférieur droit correspond à la fonction g définie sur l'intervalle $[0;3]$ par :

$$g(x) = \frac{27x}{2x^2+18}.$$

1. *Cette question est une question à choix multiples. Une seule réponse est exacte.*
Recopier sur la copie la réponse qui vous parait exacte. On ne demande aucune justification.
La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

L'aire $\mathscr{A}_1$ du rectangle OPQR, en unité d'aire (u. a.). est égale à :

3 u. a.	5,25 u. a.	6,75 u. a.

2. Un logiciel de calcul formel donne ci-dessous une primitive de la fonction g sur l'intervalle $[0; 3]$, où c_1 est une constante. Ce résultat est admis et pourra être exploité dans les questions suivantes.

⊳ Calcul formel	
1	$g(x) := 27 * x/(2 * x\hat{}2 + 18)$
•	$\rightarrow g(x) := 27 \cdot \dfrac{x}{2x^2+18}$
2	intégrale$(g(x))$
○	$\rightarrow \frac{27}{4}\ln\left(x^2+9\right) + c_1$

Calculer l'aire $\mathscr{A}_2$, en unité d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe représentative de la fonction g, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 3$.

3. Déduire des questions précédentes l'aire $\mathscr{A}$ en unité d'aire. Arrondir au millième.

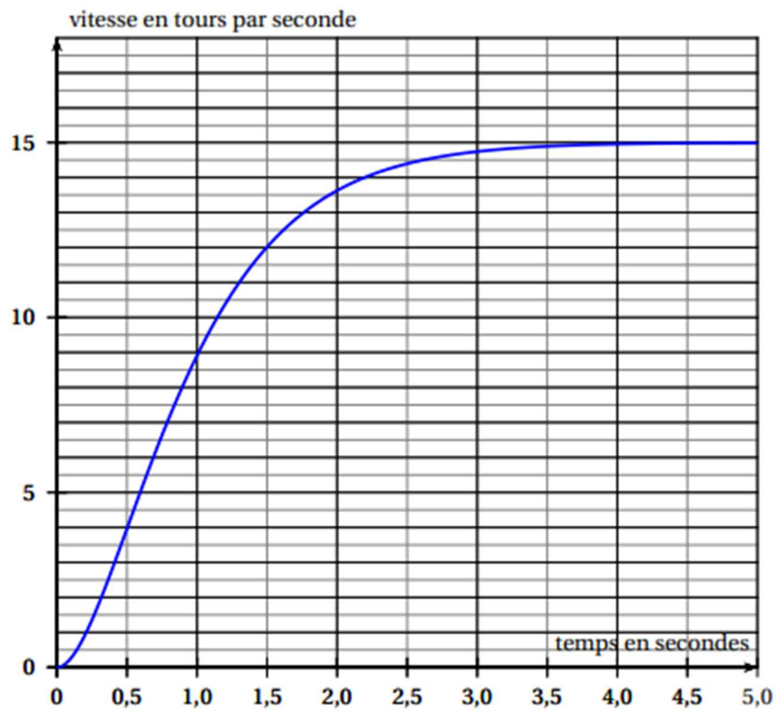
Brevet de technicien supérieur
9 mai 2017 - groupement A1 - CIRA

Exercice 1 **11 points**

Les 4 parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante. Dans cet exercice on s'intéresse à l'évolution, en fonction du temps, de la vitesse de rotation d'un moteur à courant continu.

Partie A : Étude de la vitesse de rotation du moteur lors de son démarrage

Dans un premier temps, le moteur à courant continu utilisé n'est soumis à aucune charge mécanique. La vitesse de rotation de ce moteur, exprimée en tour par seconde (tour/s), est notée ω. Elle dépend du temps t, exprimé en seconde (s), écoulé depuis le démarrage du moteur.
La courbe ci-dessous représente l'évolution de cette vitesse en fonction du temps.



1. Répondre aux questions suivantes à l'aide de la représentation graphique ci-dessus.

a. Quelle est la vitesse de rotation du moteur à l'instant $t = 0$?

b. Quelle est la vitesse de rotation du moteur une seconde après le démarrage ?

c. Vers quelle valeur ω_S semble se stabiliser la vitesse de rotation du moteur ?

d. Avec la précision permise par le graphique, déterminer au bout de combien de temps on atteint 95 % de la vitesse stabilisée. Expliquer.

2. On admet que, dans les conditions de fonctionnement étudiées dans la partie A, la vitesse de rotation du moteur est modélisée par la fonction ω définie pour $t \geqslant 0$ par :

$$\omega(t) = 15 - (30t + 15)\mathrm{e}^{-2t}$$

   a. On note ω' la fonction dérivée de ω. Justifier que pour $t \geqslant 0$: $\omega'(t) = 60t\mathrm{e}^{-2t}$.

   b. En déduire le sens de variation de la fonction ω sur $[0\,;\,+\infty[$.

   c. Calculer $\omega'(0)$. Donner une interprétation graphique du résultat.

Le formulaire ci-dessous peut être utilisé pour les parties B et C de l'exercice

Équation différentielle sans second membre	Solutions sur $\mathbb{R}$
$ay'' + by' + cy = 0$ avec a, b et c des constantes réelles. Équation caractéristique : $ar^2 + br + c = 0$ de discriminant Δ.	• Si $\Delta > 0$: $t \longmapsto A\mathrm{e}^{r_1 t} + B\mathrm{e}^{r_2 t}$, avec A, B constantes réelles et r_1, r_2 les solutions de l'équation caractéristique. • Si $\Delta = 0$: $t \longmapsto (At + B)\mathrm{e}^{rt}$, avec A, B constantes réelles et r la solution de l'équation caractéristique. • Si $\Delta < 0$: $t \longmapsto \mathrm{e}^{\alpha t}[A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)$, avec A, B constantes réelles et $\alpha + \mathrm{i}\beta$ et $\alpha - \mathrm{i}\beta$ les solutions de l'équation caractéristique.

Partie B : Résolution d'une équation différentielle permettant d'obtenir la vitesse de rotation

Sous certaines conditions de charge, la vitesse de rotation d'un moteur à courant continu soumis à une tension constante U, exprimée en Volt (V), est solution de l'équation différentielle

$$(E) : \quad \frac{1}{4}y'' + y' + y = \frac{U}{k}, \text{ où } k \text{ est une valeur caractéristique du moteur.}$$

1. On note (E_0) l'équation homogène associée à (E). On a donc :

$$(E_0) : \quad \frac{1}{4}y'' + y' + y = 0.$$

   Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E_0).

2. Vérifier que la fonction constante $g : \ t \longmapsto \dfrac{U}{k}$ est une solution de l'équation différentielle (E).

3. En déduire les solutions de l'équation différentielle de (E).

4. En prenant $k = \dfrac{2}{3}$ et $U = 10$ V montrer que la fonction ω donnée dans la question A. 2. est la solution de l'équation différentielle (E) vérifiant les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

Partie C : Détermination de la vitesse de rotation d'un moteur à courant continu à partir des principes de la physique

D'une manière plus générale on démontre que la vitesse de rotation du moteur alimenté par une tension continue U vérifie l'équation différentielle

$$(E_1) : \quad \alpha^2 y'' + 2m\alpha y' + y = \frac{U}{k},$$

où α, m et k sont des paramètres strictement positifs dépendant des caractéristiques physiques du moteur étudié (résistance, inductance, moment d'inertie).

Dans cette partie on prend : $U = 10$ V ; $\alpha = 0{,}3$; $m = 0{,}6$ et $k = \dfrac{2}{3}$.

L'équation différentielle (E_1) s'écrit donc :

$$0,09y'' + 0,36y' + y = 15.$$

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $0,09z^2 + 0,36z + 1 = 0$.

2. Parmi les quatre fonctions proposées ci-dessous, une seule est solution de l'équation différentielle (E_1) et vérifie les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.
Quelle est cette fonction ? Justifier la réponse.

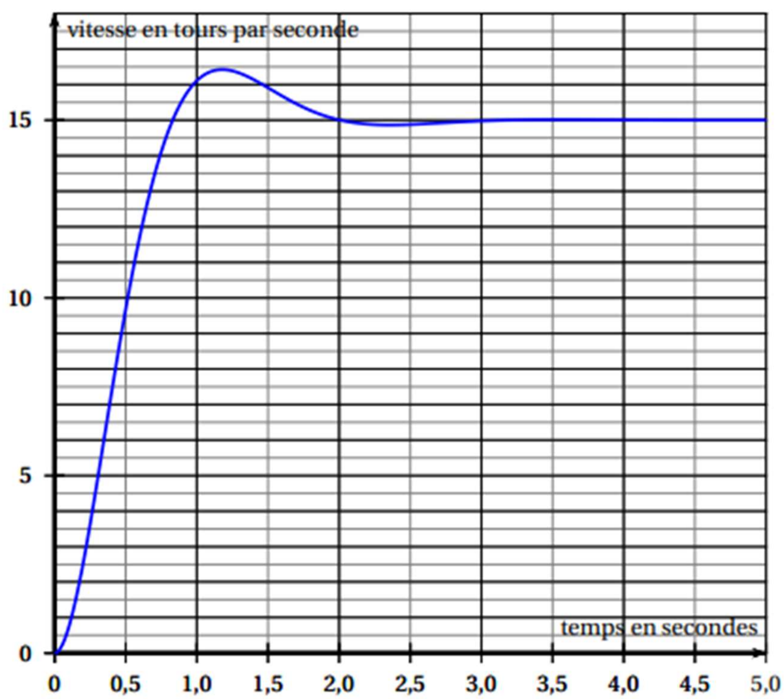
Fonction 1 : $t \longmapsto 15\left[1 - \mathrm{e}^{-\frac{8}{3}t}\left(\cos(2t) + \frac{3}{4}\sin(2t)\right)\right]$

Fonction 2 : $t \longmapsto 15\left[1 - \mathrm{e}^{-2t}\left(\cos\left(\frac{8}{3}t\right) + \frac{3}{4}\sin\left(\frac{8}{3}t\right)\right)\right]$

Fonction 3 : $t \longmapsto 15\mathrm{e}^{\frac{2}{3}t} - 15\mathrm{e}^{-\frac{14}{3}t}$

Fonction 4 : $t \longmapsto 15 - \mathrm{e}^{-2t}\left[\cos\left(\frac{8}{3}t\right) + \frac{3}{4}\sin\left(\frac{8}{3}t\right)\right]$

3. La solution de l'équation différentielle (E_1) qui vérifie les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$ modélise l'évolution de la vitesse du moteur en fonction du temps dans les conditions étudiées dans la partie C. Elle est représentée ci-dessous.



D'après cette modélisation, quelle est la vitesse maximale du moteur ?
À quel moment, environ, est-elle atteinte ?

Exercice 2 **9 points**

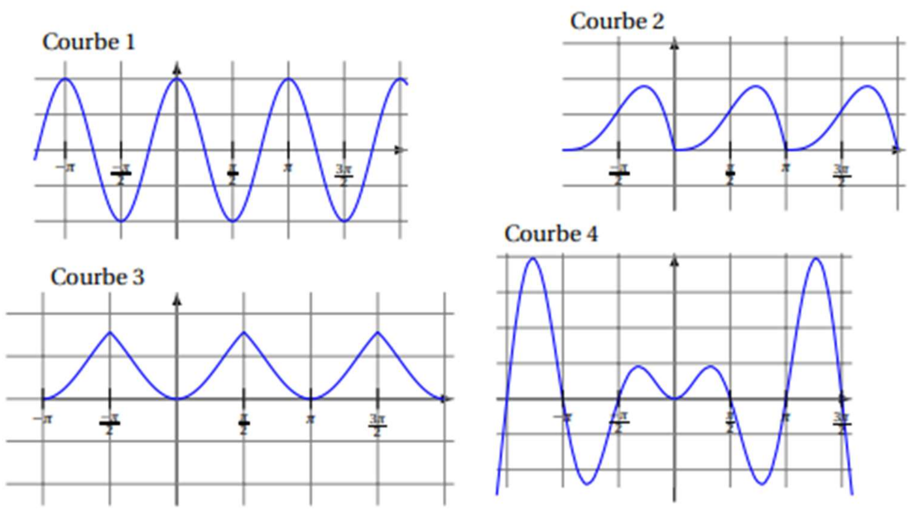
Les deux parties suivantes sont indépendantes. Elles peuvent être traitées dans n'importe quel ordre

PARTIE A :

On appelle f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, paire, périodique de période π, vérifiant :

$$f(t) = t\sin(t) \quad \text{pour } t \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right].$$

1. Parmi les quatre courbes suivantes quelle est celle qui représente la fonction f ? On n'attend pas de justification.



2. On admet que la fonction f est développable en série de Fourier.
On note S son développement en série de Fourier.
On rappelle que :

$S(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right)$, avec $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, T période de f ; $a_0 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t$. Pour $n \geqslant 1$: $a_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t$ et $b_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t$ avec a constante réelle quelconque.

a. Justifier que $b_n = 0$ pour tout n entier naturel supérieur ou égal à 1.

b. Montrer que la fonction g définie pour tout réel t par $g(t) = -t\cos(t) + \sin(t)$ est une primitive de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $t \longmapsto t\sin t$.

c. La fonction étant paire et de période π, a_0 vérifie $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Vérifier que $a_0 = \frac{2}{\pi}$. Écrire les étapes du calcul effectué.

3. On admet que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$: $a_n = \frac{2}{\pi}(-1)^n\left(\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n-1)^2}\right)$

Donner les valeurs de a_1 et a_2 arrondies au millième.

4. On note f_e le nombre positif vérifiant $f_e^2 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f^2(t)\,\mathrm{d}t$.

On admet que l'expression $a_0^2 + \frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{2}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$, obtenue d'après la formule de Parseval, permet d'obtenir la valeur approchée de f_e^2 au millième.

a. Calculer la valeur approchée de f_e^2 au millième.

b. Si f modélise un signal de période π, que représente f_e ?

Brevet de technicien supérieur
Métropole session 2016 - groupement A1

Exercice 2 **7 points**
Commun à tous les candidats

On rappelle que le développement en série de Fourier d'une fonction f périodique de période T est

$$S(t) = a_0 + \sum_{n\geqslant 1}^{+\infty} \left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right).$$

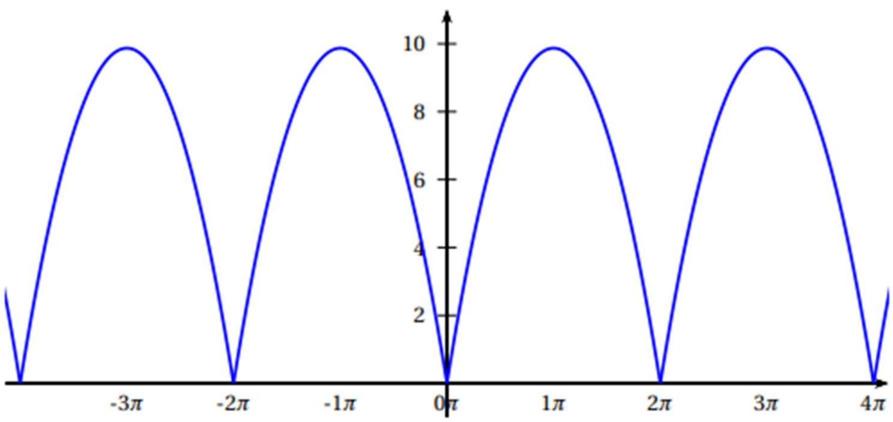
avec $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, $a_0 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t$ et, pour tout entier $n \geqslant 1$ et toute constante réelle α :

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^{a+T} f(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad b_n = \frac{2}{T}\int_0^{a+T} f(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t.$$

Les trois parties de l'exercice sont indépendantes

Partie A

On donne ci-dessous la représentation graphique C d'une fonction f définie pour tout réel x, paire, périodique de période T et telle que pour tout $x \in [0 ; 2\pi]$: $f(x) = x(2\pi - x)$.



On souhaite déterminer les coefficients a_0, a_n et b_n, avec $n \geqslant 1$, de la série de Fourier associée à cette fonction f.

1. Déterminer T puis calculer ω.
2. Calculer le coefficient a_0.
3. Que valent les coefficients a_n et b_n pour $n \geqslant 1$?
   On pourra utiliser les résultats ci-dessous obtenus à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

integrate(x*(2pi-x)*cos(n*x),x,0,2*pi) $= \dfrac{-2n\pi\cos(n*2\pi)+2\sin(n*2\pi)}{n^3} - \dfrac{2\pi}{n^2}$
integrate(x*(2pi-x)*cos(n*x),x,0,2*pi) $= \dfrac{n^2\pi^2\sin(n\pi)+2\sin(n\pi)}{n^3} - \dfrac{2\pi}{n^2}$

   On simplifiera le plus possible les réponses.

~ Brevet de technicien supérieur ~
Métropole–Antilles–Guyane–Polynésie
session 2009 - groupement B2 Microtechniques

Exercice 2 **8 points**

On considère un signal correspondant à la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période $T = 2\pi$ et telle que :

$$f(t) = \pi - t \; pour 0 \leqslant t < \pi \text{ et } f(t) = 0 \text{ pour } \pi \leqslant t < 2\pi.$$

Soit $S(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$ le développement en série de Fourier associé à la fonction f

1. Tracer, dans un repère orthogonal, une représentation graphique de la fonction f, pour t appartenant à l'intervalle $[-2\pi\,;\,6\pi[$.
2. Montrer que $a_0 = \dfrac{\pi}{4}$.
3. Un logiciel de calcul formel a permis d'obtenir les intégrales suivantes, pour n entier non nul :

$$\int_0^{\pi} (\pi - t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{1-(-1)^n}{n^2} \quad \text{et} \quad \int_0^{\pi} (\pi - t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{n}.$$

Ces résultats sont admis et n'ont donc pas à être démontrés.

En déduire les expressions de a_n et de b_n en fonction de l'entier non nul n.

4. *Calcul d'une valeur approchée de la valeur efficace de f*

Pour tout entier n, on pose $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ pour $n \geqslant 1$ et $c_0 = |a_0|$, où a_n et b_n sont les coefficients de Fourier de la fonction f.

Le tableau suivant donne les valeurs de c_n, arrondies à 10^{-4}, pour n variant de 0 à 5.

n	0	1	2	3	4	5
c_n	0,785 4	1,185 4	0,5	0,340 8	0,25	0,201 6

On note E_f la valeur efficace de la fonction f.

La formule de Parseval permet d'écrire :

$$\left(E_f\right)^2 = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) = c_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2.$$

On obtient une valeur approchée de E_f en ne prenant pas en compte les harmoniques d'ordre supérieur ou égal à 6. On obtient alors une valeur approchée P du carré de la valeur efficace de f par la formule : $P = c_0^2 + \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=1}^{n=5} c_n^2$.

Donner, en utilisant le tableau ci-dessus, une approximation décimale à 10^{-4} près de P.

5. *Comparaison avec la valeur exacte de la valeur efficace de f*

a. On rappelle que $\left(E_f\right)^2 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f^2(t)\,\mathrm{d}t$.

Montrer que $\left(E_f\right)^2 = \dfrac{\pi^2}{6}$.

b. Déduire des questions précédentes une valeur approchée arrondie à 10^{-3} du rapport $\dfrac{P}{\left(E_f\right)^2}$.

On peut observer ici que $\dfrac{P}{\left(E_f\right)^2}$ est inférieur à 0,95. On constate ainsi que l'abandon des harmoniques d'ordre supérieur à 5 ne fournit pas une excellente approximation de $\left(E_f\right)^2$ dans le cas où, comme ici, les valeurs de c_n ne décroissent pas rapidement.

Formulaire pour les séries de Fourier

f : fonction périodique de période T.
Développement en série de Fourier :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t},\ (n \in \mathbb{N}^*,\ k \in \mathbb{Z}).$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t \quad ; \quad a_n = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t;$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t.$$

$$c_k = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega t}\,\mathrm{d}t\ (k \in \mathbb{Z})\ ;\ c_0 = a_0.$$

$$\frac{a_n - \mathrm{i}b_n}{2} = c_n\ ;\ \frac{a_n + \mathrm{i}b_n}{2} = c_{-n}\ (n \in \mathbb{N}^*).$$