Sommaire

Vous trouverez les corrections à l'adresse suivante : `https://www.apmep.fr/Annales-Terminale-Generale`

1 Baccalauréat S Polynésie 2 septembre 2020

Exercice 3 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{-x^2+1}$.

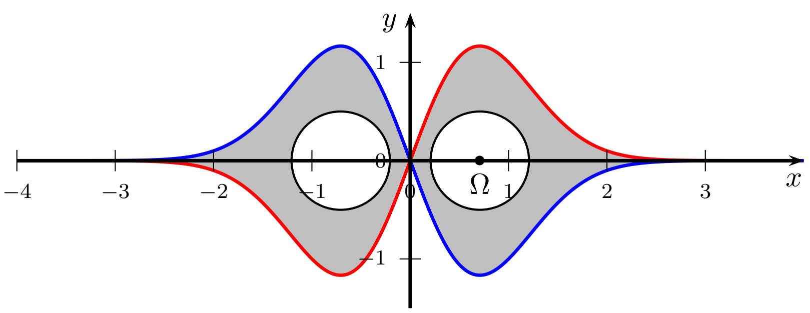
On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. (a) Montrer que pour tout x réel, $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}}{x} \times \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^{x^2}}$.
   (b) En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
2. Pour tout réel x, on considère les points M et N de la courbe $(\mathcal{C})$ d'abscisses respectives x et $-x$.
   (a) Montrer que le point O est le milieu du segment $[MN]$.
   (b) Que peut-on en déduire pour la courbe $(\mathcal{C})$?
3. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
4. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0,5$ admet sur $[0\ ;\ +\infty[$ exactement deux solutions notées α et β (avec $\alpha < \beta$).
   (b) En déduire les solutions sur $[0\ ;\ +\infty[$ de l'inéquation $f(x) \geqslant 0,5$.
   (c) Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de α et β.
5. Soit A un réel strictement positif. On pose $I_A = \displaystyle\int_0^A f(x)\,\mathrm{d}x$.
   (a) Justifier que $I_A = \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-A^2+1}\right)$.
   (b) Calculer la limite de I_A lorsque A tend vers $+\infty$.

   On admet que cette limite est l'aire en unités d'aire située entre la partie de la courbe $(\mathcal{C})$ sur $[0\ ;\ +\infty[$ et l'axe des abscisses.
6. Comme illustré sur le graphique ci-dessous, on s'intéresse à la partie grisée du plan qui est délimitée par :
   - la courbe $(\mathcal{C})$ sur $\mathbb{R}$ et la courbe $(\mathcal{C}')$ symétrique de $(\mathcal{C})$ par rapport à l'axe des abscisses ;
   - le cercle de centre $\Omega\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ 0\right)$ et de rayon 0,5 et son symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

   On admet que le disque de centre $\Omega\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ 0\right)$ et de rayon 0,5 et son symétrique par rapport à l'axe des ordonnées sont situés entièrement entre la courbe $(\mathcal{C})$ et la courbe $(\mathcal{C}')$.

   Déterminer une valeur approchée en unité d'aire au centième près de l'aire de cette partie grisée du plan.



2 Baccalauréat S Antilles-Guyane 9 septembre 2020

Exercice 2 : *La partie* C *est indépendante des parties* A *et* B

Partie A

La fonction g est définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$.

On admet que la fonction g est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$.

1. Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction g sur $[0\ ;\ +\infty[$ et dresser son tableau de variations.

Partie B

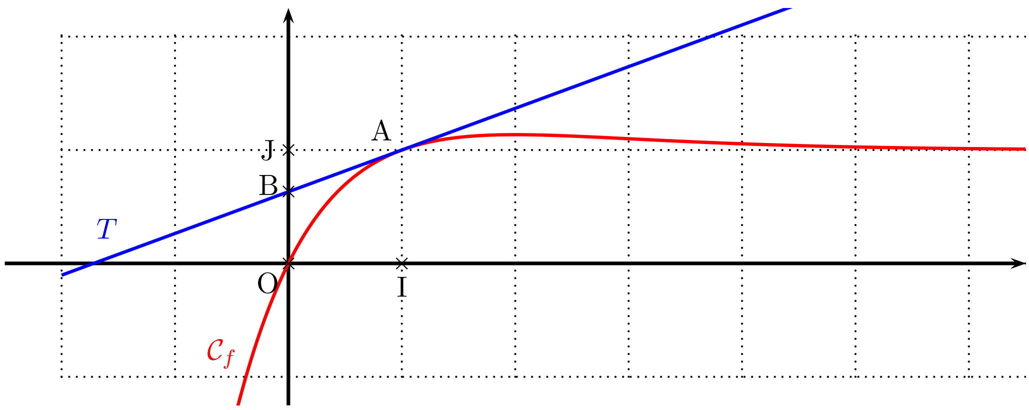
Dans cette partie, k désigne un réel strictement positif.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-1)\mathrm{e}^{-kx} + 1$.

On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O ; I, J), on note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f. Cette courbe est représentée ci-dessous pour une certaine valeur de k.

La tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 1 coupe l'axe des ordonnées en un point noté B.



1. (a) Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = \mathrm{e}^{-kx}(-kx + k + 1)$.

   (b) Démontrer que l'ordonnée du point B est égale à $g(k)$ où g est la fonction définie dans la **partie A**.
2. En utilisant la **partie A**, démontrer que le point B appartient au segment [OJ].

Partie C

Dans cette partie, on considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (x-1)\mathrm{e}^{-2x} + 1$.

On admet que la fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On se place dans un repère orthonormé (O ; I, J).

On note $\mathcal{C}_h$ la courbe représentative de la fonction h et d la droite d'équation $y = x$.

La courbe $\mathcal{C}_h$ et la droite d sont représentées sur l'**ANNEXE 1 à rendre avec la copie**.

On admet que la courbe $\mathcal{C}_h$ est au-dessus de la droite d sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

Soit $\mathcal{D}$ le domaine du plan délimité par la courbe $\mathcal{C}_h$, la droite d et les droites verticales d'équations $x = 0$ et $x = 1$. Soit $\mathcal{A}$ l'aire de $\mathcal{D}$ exprimée en unité d'aire.

1. Sur l'**ANNEXE 1** à rendre avec la copie, hachurer le domaine $\mathcal{D}$ et justifier que

$$\mathcal{A} = \int_0^1 [h(x) - x]\,\mathrm{d}x.$$

2. (a) Démontrer que, pour tout réel x, $h(x) - x = (1-x)\left(1 - \mathrm{e}^{-2x}\right)$.

   (b) On admet que, pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-2x} \geqslant 1 - 2x$.

   Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$, $h(x) - x \leqslant 2x - 2x^2$.

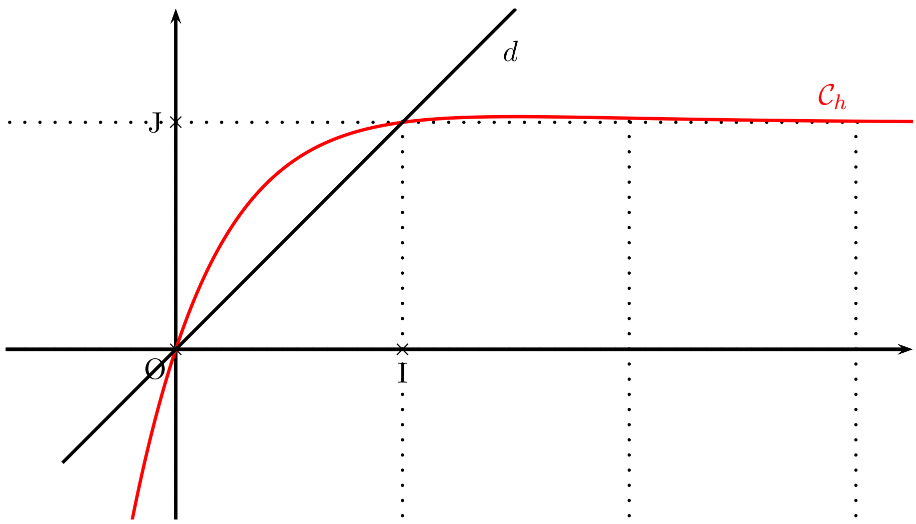
   (c) En déduire que $\mathcal{A} \leqslant \dfrac{1}{3}$.

3. Soit H la fonction définie sur $[0\,;\,1]$ par $H(x) = \dfrac{1}{4}(1-2x)\mathrm{e}^{-2x} + x$.

   On admet que la fonction H est une primitive de la fonction h sur $[0\,;\,1]$.

   Déterminer la valeur exacte de $\mathcal{A}$.

ANNEXE 1 (exercice 2, partie C)



3 Baccalauréat S Métropole–La Réunion 11 septembre 2020

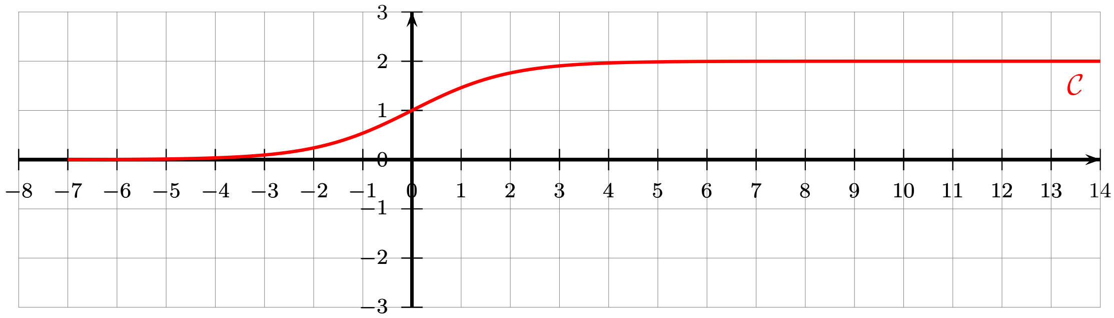
Exercice 1 :

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}.$$

On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f dans un repère orthonormé.



1. Calculer la limite de la fonction f en moins l'infini et interpréter graphiquement le résultat.
2. Montrer que la droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}$.
3. Calculer $f'(x)$, f' étant la fonction dérivée de f, et vérifier que pour tout nombre réel x on a :

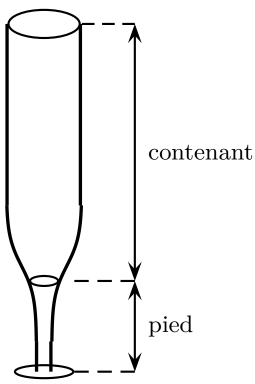
$$f'(x) = \frac{f(x)}{\mathrm{e}^x + 1}.$$

4. Montrer que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.
5. Montrer que la courbe $\mathcal{C}$ passe par le point $\mathrm{I}(0\,;\,1)$ et que sa tangente en ce point a pour coefficient directeur $0,5$.

Partie B

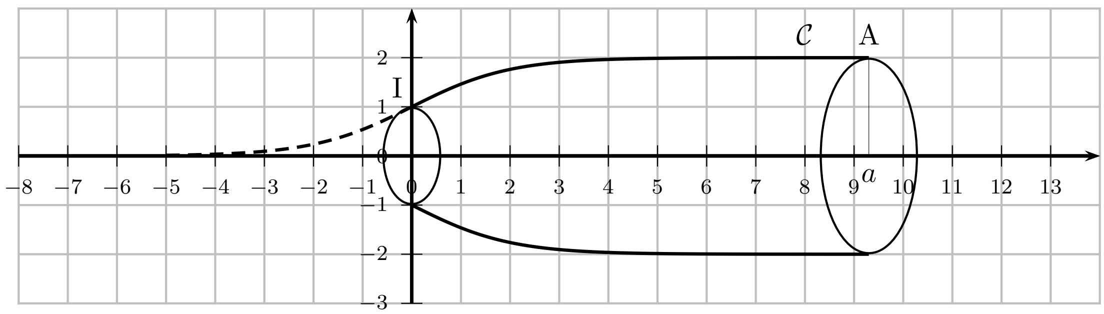
Une entreprise souhaite fabriquer de façon automatisé des flûtes (verres à pied) de forme allongée de contenance $12,5$ cL. Chaque flûte est composée de deux parties comme sur l'illustration ci-contre : un pied, en verre plein, et un contenant de $12,5$ cL.

À l'aide de la fonction f définie dans la **partie A**, le fabricant modélise le profil du contenant de la flûte de la manière décrite ci-dessous.



Soit A un point de $\mathcal{C}$ d'abscisse a strictement positive. La rotation autour de l'axe des abscisses appliquée à la partie de $\mathcal{C}$ limitée par les points I et A engendre une surface modélisant le contenant de la flûte en prenant pour unité 1 cm.

Ainsi x et $f(x)$ représente des longueurs en centimètres et l'objectif de cette partie est de déterminer la valeur de a pour que le volume du contenant soit égal à $12,5$ cL.



Une unité représente 1 cm.

La valeur de a utilisée sur le graphique ci-dessus ne correspond pas à la valeur cherchée.

Le réel a étant strictement positif, on admet que le volume $V(a)$ de ce solide en cm^3 est donné par la formule :

$$V(a) = \pi \int_0^a (f(x))^2 \, \mathrm{d}x.$$

1. Vérifier, pour tout nombre réel $x \geqslant 0$, l'égalité :

$$(f(x))^2 = 4\left(\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1} + \frac{-\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x + 1)^2}\right).$$

2. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de chacune des fonctions :

$$g : x \longmapsto \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1} \quad \text{et} \quad h : x \longmapsto \frac{-\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x + 1)^2}.$$

3. En déduire que pour tout réel $a > 0$:

$$V(a) = 4\pi\left[\ln\left(\frac{\mathrm{e}^a + 1}{2}\right) + \frac{1}{\mathrm{e}^a + 1} - \frac{1}{2}\right].$$

4. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une valeur approchée de a à $0,1$ près, sachant qu'une flûte doit contenir 12,5 cL, c'est-à -dire 125 cm^3. Aucune justification n'est attendue.

4 Baccalauréat S – Nouvelle Calédonie 2 décembre 2020

Exercice 3 :

Partie A

Soit g la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$, par $g(x) = x^2 + x + \dfrac{1}{4} + \dfrac{4}{(1+\mathrm{e}^x)^2}$.

On admet que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note g' sa fonction dérivée.

1. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. On admet que la fonction g' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et que $g'(0) = 0$.

   Déterminer le signe de la fonction g' sur $\mathbb{R}$.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction g et calculer le minimum de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3 - \dfrac{2}{1+\mathrm{e}^x}$.

On désigne par $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, représentée dans la **figure** ci-dessous.

Soit A le point de coordonnées $\left(-\dfrac{1}{2}\ ;\ 3\right)$.

1. Démontrer que le point $\mathrm{B}(0\,;\,2)$ appartient à $\mathcal{C}_f$.
2. Soit x un réel quelconque.

   On note M le point de la courbe $\mathcal{C}_f$ de coordonnées $(x\ ;\ f(x))$.

   Démontrer que $\mathrm{A}M^2 = g(x)$.
3. On admet que la distance $\mathrm{A}M$ est minimale si et seulement si $\mathrm{A}M^2$ est minimal.

   Déterminer les coordonnées du point de la courbe $\mathcal{C}_f$ tel que la distance $\mathrm{A}M$ est minimale.
4. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.
   (a) Calculer $f'(x)$ pour tout réel x.
   (b) Soit T la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point B.

   Démontrer que l'équation réduite de T est $y = \dfrac{x}{2} + 2$.
5. Démontrer que la droite T est perpendiculaire à la droite (AB).

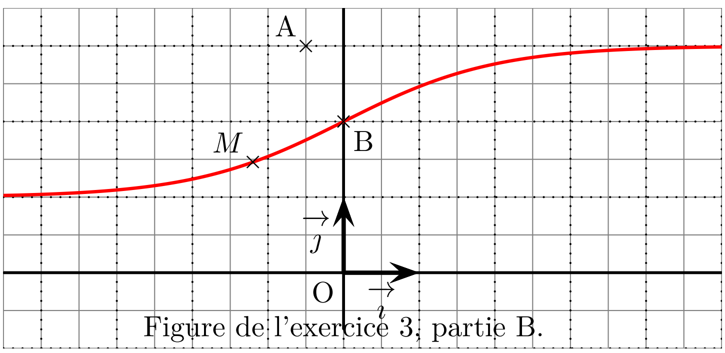


Figure de l'exercice 3, partie B.

5 Baccalauréat S Liban 31 mai 2019

Exercice 1 :

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

1. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,1]$ par $f(x) = x(1-\ln x)^2$.

   (a) Déterminer une expression de la fonction dérivée de f et vérifier que pour tout $x \in]0\,;\,1]$, $f'(x) = (\ln x + 1)(\ln x - 1)$.

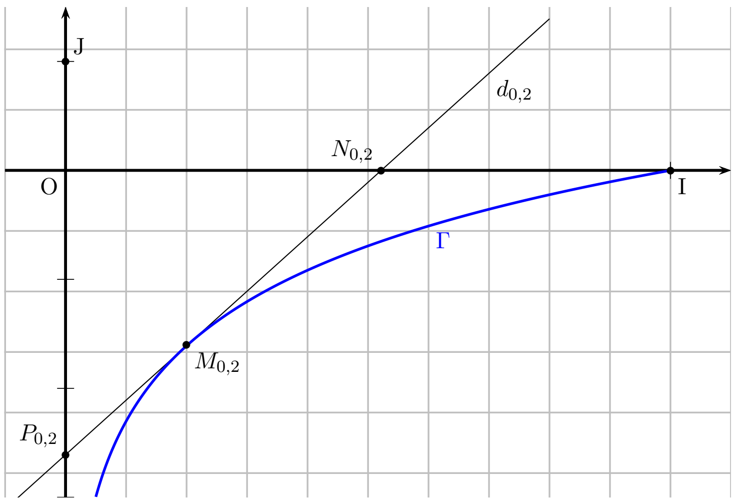
   (b) Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations sur l'intervalle $]0\,;\,1]$ (on admettra que la limite de la fonction f en 0 est nulle).

On note Γ la courbe représentative de la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;\,1]$ par $g(x) = \ln x$.

Soit a un réel de l'intervalle $]0\,;\,1]$. On note M_a le point de la courbe Γ d'abscisse a et d_a la tangente à la courbe Γ au point M_a. Cette droite d_a coupe l'axe des abscisses au point N_a et l'axe des ordonnées au point P_a .

On s'intéresse à l'aire du triangle $\text{O}N_aP_a$ quand le réel a varie dans l'intervalle $]0\,;\,1]$.

2. Dans cette question, on étudie le cas particulier où $a = 0,2$ et on donne la figure ci-dessous.



   (a) Déterminer graphiquement une estimation de l'aire du triangle $\text{O}N_{0,2}P_{0,2}$ en unités d'aire.

   (b) Déterminer une équation de la tangente $d_{0,2}$.

   (c) Calculer la valeur exacte de l'aire du triangle $\text{O}N_{0,2}P_{0,2}$.

   Dans ce qui suit, on admet que, pour tout réel a de l'intervalle $]0\,;\,1]$, l'aire du triangle $\text{O}N_aP_a$ en unités d'aire est donnée par $\mathcal{A}(a) = \dfrac{1}{2}a(1-\ln a)^2$.

3. À l'aide des questions précédentes, déterminer pour quelle valeur de a l'aire $\mathcal{A}(a)$ est maximale. Déterminer cette aire maximale.

6 Baccalauréat S Centres étrangers - Pondichéry 13 juin 2019

Exercice 2 :

Le but de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie par la donnée de son premier terme u_1 et, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par la relation : $u_{n+1} = (n+1)u_n - 1$.

Partie A

1. Vérifier, en détaillant le calcul, que si $u_1 = 0$ alors $u_4 = -17$.
2. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'en saisissant préalablement dans U une valeur de u_1 il calcule les termes de la suite (u_n) de u_2 à u_{13}.

```
Pour N allant de 1 à 12
        U ←
Fin Pour
```

3. On a exécuté cet algorithme pour $u_1 = 0,7$ puis pour $u_1 = 0,8$.

   Voici les valeurs obtenues.

Pour $u_1 = 0,7$	Pour $u_1 = 0,8$
0,4	0,6
0,2	0,8
$-0,2$	2,2
-2	10
-13	59
-92	412
-737	3 295
$-6\,634$	29 654
$-66\,341$	296 539
$-729\,752$	3 261 928
$-8\,757\,025$	39 143 135
$-113\,841\,326$	508 860 754

Quelle semble être la limite de cette suite si $u_1 = 0,7$? Et si $u_1 = 0,8$?

Partie B

On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n, supérieur ou égal à 1, par :

$$I_n = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x.$$

On rappelle que le nombre e est la valeur de la fonction exponentielle en 1, c'est-à -dire que $\mathrm{e} = \mathrm{e}^1$.

1. Prouver que la fonction F définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par $F(x) = (-1-x)\mathrm{e}^{1-x}$ est une primitive sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ de la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{1-x}$.
2. En déduire que $I_1 = \mathrm{e} - 2$.
3. On admet que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a :

$$I_{n+1} = (n+1)I_n - 1.$$

   Utiliser cette formule pour calculer I_2.
4. (a) Justifier que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$ et pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a : $0 \leqslant x^n\mathrm{e}^{1-x} \leqslant x^n\mathrm{e}$.
   (b) Justifier que : $\displaystyle\int_0^1 x^n\mathrm{e}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}}{n+1}$.
   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a : $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{n+1}$.
   (d) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

Partie C

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a :

$$u_n = n\,!\,(u_1 - \mathrm{e} + 2) + I_n.$$

   On rappelle que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a :

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1 \quad \text{et } I_{n+1} = (n+1)I_n - 1.$$

2. On admet que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\,! = +\infty$.
   (a) Déterminer la limite de la suite (u_n) lorsque $u_1 = 0,7$.
   (b) Déterminer la limite de la suite (u_n) lorsque $u_1 = 0,8$.

7 Baccalauréat S Polynésie 20 juin 2018

Exercice 2 **6 points**

Commun à tous les candidats

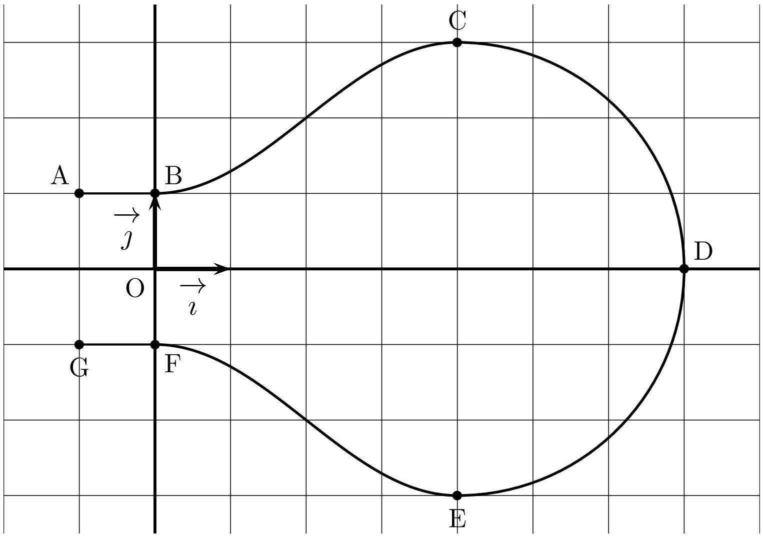
Dans cet exercice, on s'intéresse au volume d'une ampoule basse consommation.

Partie A - Modélisation de la forme de l'ampoule

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

On considère les points A$(-1\ ;\ 1)$, B$(0\,;\,1)$, C$(4\,;\,3)$, D$(7\,;\,0)$, E$(4\ ;\ -3)$, F$(O\ ;\ -1)$ et G$(-1\ ;\ -1)$.

On modélise la section de l'ampoule par un plan passant par son axe de révolution à l'aide de la figure ci-dessous :



La partie de la courbe située au-dessus de l'axe des abscisses se décompose de la manière suivante :

- la portion située entre les points A et B est la représentation graphique de la fonction constante h définie sur l'intervalle $[-1\ ;\ 0]$ par $h(x) = 1$;
- la portion située entre les points B et C est la représentation graphique d'une fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,4]$ par $f(x) = a + b\sin\left(c + \frac{\pi}{4}x\right)$, où a, b et c sont des réels non nuls fixés et où le réel c appartient à l'intervalle $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$;
- la portion située entre les points C et D est un quart de cercle de diamètre [CE].

La partie de la courbe située en-dessous de l'axe des abscisses est obtenue par symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

1. (a) On appelle f' la fonction dérivée de la fonction f. Pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,4]$, déterminer $f'(x)$.

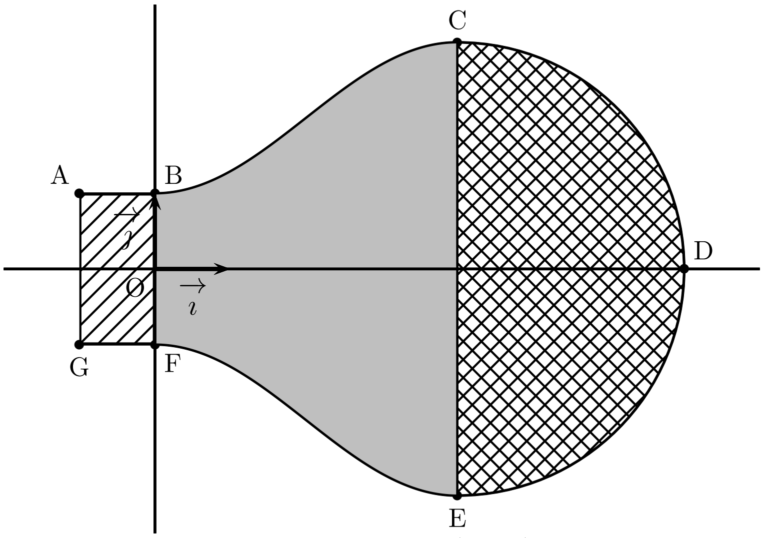
(b) On impose que les tangentes aux points B et C à la représentation graphique de la fonction f soient parallèles à l'axe des abscisses. Déterminer la valeur du réel c.

2. Déterminer les réels a et b.

Partie B - Approximation du volume de l'ampoule

Par rotation de la figure précédente autour de l'axe des abscisses, on obtient un modèle de l'ampoule.

Afin d'en calculer le volume, on la décompose en trois parties comme illustré ci-dessous :



Vue dans le plan (BCE)

On rappelle que :

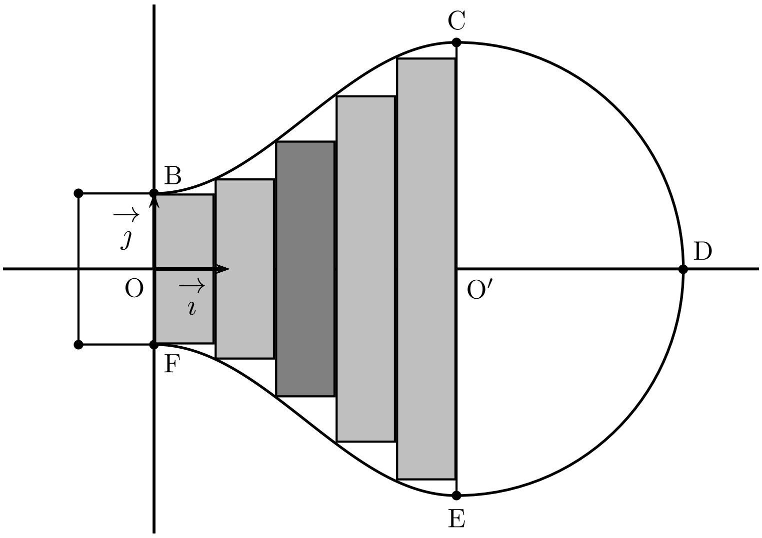
- le volume d'un cylindre est donné par la formule $\pi r^2 h$ où r est le rayon du disque de base et h est la hauteur ;
- le volume d'une boule de rayon r est donné par la formule $\dfrac{4}{3}\pi r^3$.

On admet également que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,4]$, $f(x) = 2 - \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$.

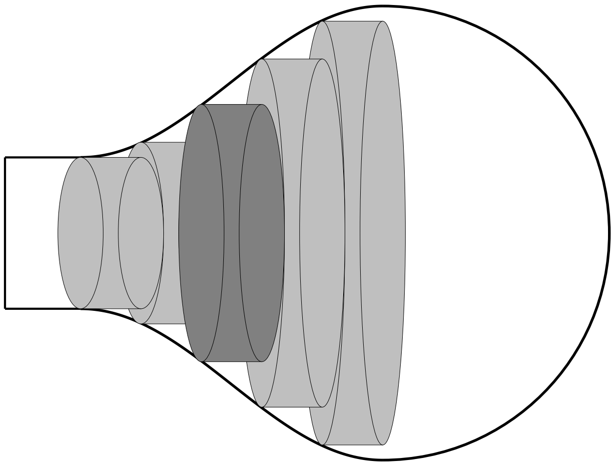
1. Calculer le volume du cylindre de section le rectangle ABFG.
2. Calculer le volume de la demi-sphère de section le demi -disque de diamètre [CE].
3. Pour approcher le volume du solide de section la zone grisée BCEF, on partage le segment $[OO']$ en n segments de màÂªme longueur $\dfrac{4}{n}$ puis on construit n cylindres de màÂªme hauteur $\dfrac{4}{n}$.

   (a) **Cas particulier :** dans cette question uniquement on choisit $n = 5$.

   Calculer le volume du troisième cylindre, grisé dans les figures ci-dessous, puis en donner la valeur arrondie à 10^{-2}.



Vue dans le plan (BCE)



Vue dans l'espace

(b) **Cas général :** dans cette question, n désigne un entier naturel quelconque non nul.

On approche le volume du solide de section BCEF par la somme des volumes des n cylindres ainsi créés en choisissant une valeur de n suffisamment grande.

Recopier et compléter l'algorithme suivant de sorte qu'à la fin de son exécution, la variable V contienne la somme des volumes des n cylindres créés lorsque l'on saisit n.

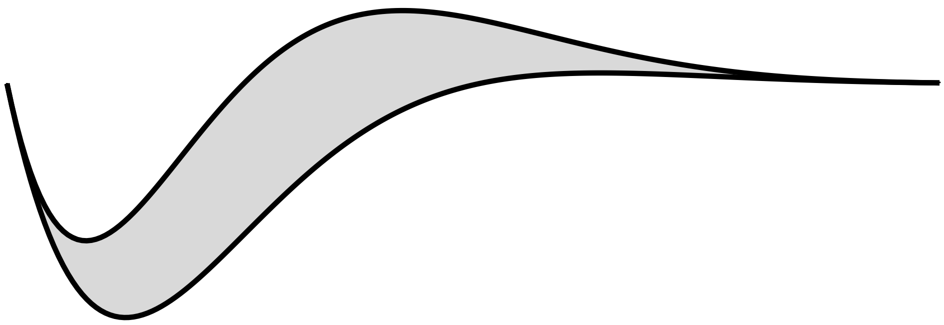
```
1   V ← 0
2   Pour k allant de ... à ... :
3       | V ← ...
4   Fin Pour
```

8 Baccalauréat S Antilles-Guyane 19 juin 2018

Exercice 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

Un publicitaire souhaite imprimer le logo ci-dessous sur un T-shirt :



Il dessine ce logo à l'aide des courbes de deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}(-\cos x + \sin x + 1) \quad \text{et} \quad g(x) = -\mathrm{e}^{-x}\cos x.$$

On admet que les fonctions f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

Partie A : Étude de la fonction f

1. Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$-\mathrm{e}^{-x} \leqslant f(x) \leqslant 3\mathrm{e}^{-x}.$$
2. En déduire la limite de f en $+\infty$.
3. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \mathrm{e}^{-x}(2\cos x - 1)$ où f' est la fonction dérivée de f.
4. Dans cette question, on étudie la fonction f sur l'intervalle $[-\pi\ ;\ \pi]$.
   (a) Déterminer le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $[-\pi\ ;\ \pi]$.
   (b) En déduire les variations de f sur $[-\pi\ ;\ \pi]$.

Partie B : Aire du logo

On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les représentations graphiques des fonctions f et g dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. L'unité graphique est de 2 centimètres. Ces deux courbes sont tracées en ANNEXE.

1. Étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à la courbe $\mathcal{C}_g$ sur $\mathbb{R}$.

2. Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

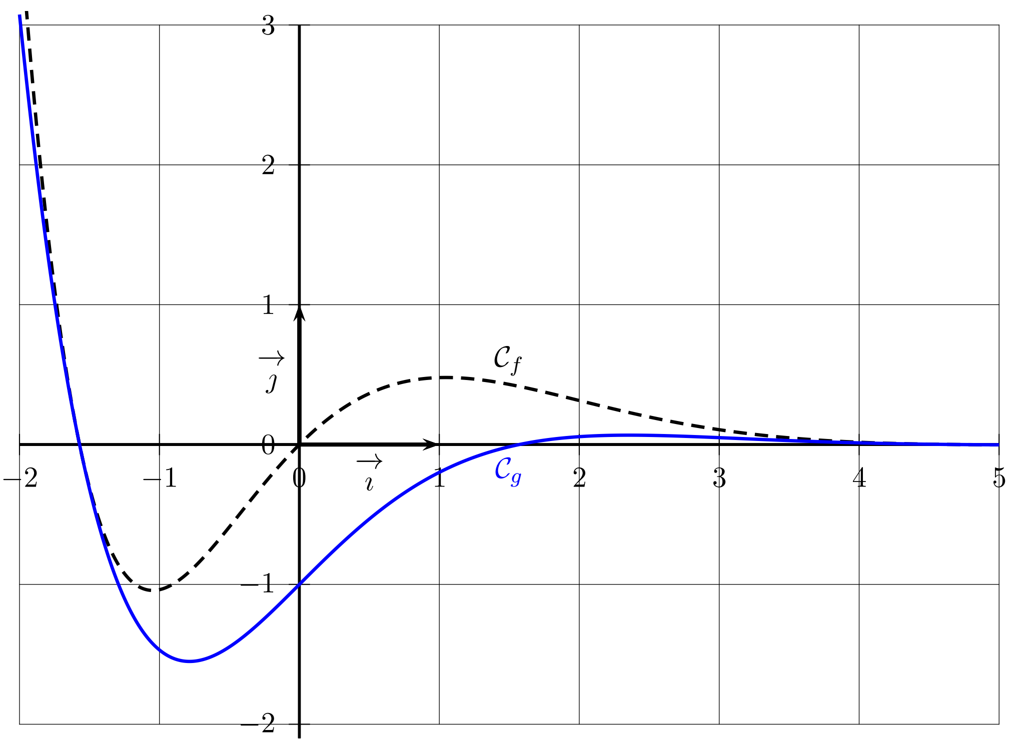
$$H(x) = \left(-\frac{\cos x}{2} - \frac{\sin x}{2} - 1\right) \mathrm{e}^{-x}.$$

   On admet que H est une primitive de la fonction $x \mapsto (\sin x + 1)\mathrm{e}^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.

   On note $\mathcal{D}$ le domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}_f$, la courbe $\mathcal{C}_g$ est les droites d'équation $x = -\frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{3\pi}{2}$.

   (a) Hachurer le domaine $\mathcal{D}$ sur le graphique en annexe à rendre avec la copie.

   (b) Calculer, en unité d'aire, l'aire du domaine $\mathcal{D}$, puis en donner une valeur approchée à 10^{-2} près en cm^2.



9 Baccalauréat S Pondichéry avril 2002

Problème : La partie **B** peut être traitée indépendamment de la partie **A**.

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$; unité graphique : 2 cm. Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{nx}\left(1+\mathrm{e}^x\right)}.$$

On désigne par $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

Partie A

Dans cette partie, on s'intéresse seulement aux fonctions f_0 et f_1 correspondant respectivement à $n = 0$ et $n = 1$.

On considère d'abord la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_0(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$.

1. (a) Déterminer la limite de $f_0(x)$ quand x tend vers $-\infty$.
   (b) Déterminer la limite de $f_0(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
   (c) En déduire les asymptotes de $\mathcal{C}_0$.
2. Montrer que le point K $\left(0\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_0$
3. Étudier les variations de f_0.
4. (a) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_0$ au point K.
   (b) Justifier que, pour étudier la position de la tangente T par rapport à la courbe $\mathcal{C}_0$, il suffit d'étudier sur $\mathbb{R}$ le signe de $g(x)$, où
   $g(x) = 2\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x - 2 - x.$
   (c) Calculer $g'(x)$ et $g''(x)$.
   (d) Déterminer, en les justifiant, les signes de $g''(x)$, $g'(x)$ et $g(x)$ suivant les valeurs de x.
   (e) En déduire la position de la tangente T par rapport à la courbe $\mathcal{C}_0$.
5. Tracer $\mathcal{C}_0$ et T dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
6. (a) Montrer que pour tout réel x, les points $M(x\ ;\ f_0(x))$ et $M'(x\ ;\ f_1(x))$ sont symétriques par rapport à la droite (d) d'équation $y = \dfrac{1}{2}$.
   (b) Comment obtient-on $\mathcal{C}_1$ à partir de $\mathcal{C}_0$? Tracer $\mathcal{C}_1$.

Partie B

Étude de la suite u définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. Montrer que $u_0 = \ln\left(\dfrac{1+\mathrm{e}}{2}\right)$.
2. Montrer que $u_0 + u_1 = 1$. En déduire u_1.
3. Montrer que la suite u est positive.
4. On pose $k(x) = f_{n+1}(x) - f_n(x)$,
   (a) Montrer que, pour tout x réel, $k(x) = \dfrac{1-\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{nx}\left(1+\mathrm{e}^x\right)}$.
   (b) Etudier le signe de $k(x)$ pour $x \in [0\ ;\ 1]$.
   (c) En déduire que la suite u est décroissante.
5. (a) Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a :
   $$u_{n-1} + u_n = \frac{1-\mathrm{e}^{-(n-1)}}{n-1}.$$
   (b) Calculer u_2.
6. Soit v la suite définie pour tout entier n supérieur ou égal à 2 par :
   $$v_n = \frac{u_{n-1} + u_n}{2}.$$
   (a) Calculer la limite de v_n quand n tend vers $+\infty$.
   (b) Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a :
   $$0 \leqslant u_n \leqslant v_n.$$
   (c) En déduire la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

10 Baccalauréat S Amérique du Nord juin 2002

Problème :

Pour tout réel k strictement positif, on considère la fonction f_k définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f_k(x) = \ln(\mathrm{e}^x + kx) - x.$$

Soit $\mathcal{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, (unités graphiques : 5 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées).

Étude préliminaire : mise en place d'une inégalité.

On considère la fonction g définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(1 + x) - x.$$

1. Étudier le sens de variation de g.
2. En déduire que pour tout réel a positif ou nul $\ln(1 + a) \leqslant a$.

Partie A : Étude de la fonction f_1 définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f_1(x) = \ln(\mathrm{e}^x + x) - x$.

1. Calculer $f_1'(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ et en déduire le sens de variation de la fonction f_1.
2. Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, $f_1(x) = \ln\left(1 + \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}\right)$. En déduire la limite de f_1 en $+\infty$.
3. Dresser le tableau de variation de f_1.

Partie B : Étude et propriétés des fonctions f_k.

1. Calculer $f_k(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ et en déduire le sens de variation de la fonction f_k.
2. Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$
   $f_k(x) = \ln\left(1 + k\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}\right)$. En déduire la limite de f_k, en $+\infty$.
3. (a) Dresser le tableau de variation de f_k.
   (b) Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, on a $f_k(x) \leqslant \dfrac{k}{\mathrm{e}}$.
4. Déterminer une équation de la tangente T_k à $\mathcal{C}_k$ au point O.

5. Soit p et m deux réels strictement positifs tels que $p < m$.

   Étudier la position relative de $\mathcal{C}_p$ et $\mathcal{C}_m$.

6. Tracer les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ ainsi que leurs tangentes respectives T_1 et T_2 en O.

Partie C : Majoration d'une intégrale.

Soit λ un réel strictement positif, on note $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}_k$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \lambda$.

1. Sans calculer $\mathcal{A}(\lambda)$, montrer que $\mathcal{A}(\lambda) \leqslant k \displaystyle\int_0^{\lambda} x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ (on pourra utiliser le résultat de la question préliminaire).
2. Calculer à l'aide d'une intégration par parties l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\lambda} x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.
3. On admet que $\mathcal{A}(\lambda)$ admet une limite en $+\infty$.

   Montrer que $\displaystyle\lim_{\lambda \to +\infty} \mathcal{A}(\lambda) \leqslant k$.

   Interpréter graphiquement ce résultat

11 Baccalauréat S Antilles–Guyane juin 2002

Problème :

Pour tout entier naturel n, on considère les fonctions f_n définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{(1-n)x}}{1+\mathrm{e}^x}.$$

Partie A - Étude de f_0 et de f_1

On appelle f_0 la fonction définie par $f_0(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$.

On appelle $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_1$ les courbes représentatives respectivement de f_0 et de f_1 dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique 5 cm).

1. Déterminer la limite de f_0 en $-\infty$ puis en $+\infty$.
2. Calculer la dérivée de f_0 et étudier son sens de variation.
3. Montrer que le point $\mathrm{I}\left(0\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie de la courbe $\mathcal{C}_0$.
4. Déterminer une équation de la tangente en I à $\mathcal{C}_0$.
5. Montrer que pour tout réel x, $f_1(-x) = f_0(x)$.
6. Par quelle transformation simple $\mathcal{C}_1$ est-elle l'image de $\mathcal{C}_0$? Construire $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_1$.

Partie B Calcul d'une aire

1. Montrer que pour tout réel x, $f_0(x) + f_1(x) = 1$.
2. Soit a un réel positif ou nul. Calculer $\displaystyle\int_0^a f_0(x)\,\mathrm{d}x$ puis $\displaystyle\int_0^a f_1(x)\,\mathrm{d}x$.
3. En déduire l'aire $\mathcal{A}(a)$ de la partie du plan définie par

$$\begin{cases} 0 & \leqslant x \leqslant & a \\ f_1(x) & \leqslant y \leqslant & 1 \end{cases}$$

4. Déterminer la limite de $\mathcal{A}(a)$ quand a tend vers $+\infty$.

Partie C Étude d'une suite

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer u_0 et u_1.

2. Montrer que pour tout entier n, $u_{n+1} + u_n = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{\mathrm{e}^n - 1}{\mathrm{e}^n}$.
3. En déduire la limite quand n tend vers $+\infty$ de $u_{n+1} + u_n$.
4. Montrer que pour tout réel x de $[0\,;1]$

$$\frac{\mathrm{e}^{(1-n)x}}{1+\mathrm{e}^x} \geqslant \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+\mathrm{e}^x}.$$

5. En déduire le sens de variations de la suite (u_n) puis la limite de (u_n).

12 Baccalauréat S Asie juin 2002

Problème :

Partie 1

On définit la fonction u sur $\mathbb{R}^*$ par

$$u(x) = 2x^3 - 1 + 2\ln|x|.$$

1. Étudier les variations de la fonction u sur $\mathbb{R}^*$. Préciser la valeur de l'extremum relatif de u.
2. Étudier les limites de u en 0, et en $+\infty$.
3. On considère l'équation $u(x) = 0$.
   (a) Montrer qu'elle n'admet qu'une seule solution sur $\left[\frac{1}{2}\ ;\ 1\right]$ et en déduire qu'elle est la seule sur $\mathbb{R}^*$; cette solution sera notée α.
   (b) Donner un encadrement de α par deux nombres rationnels de la forme $\frac{n}{10}$ et $\frac{n+1}{10}$, avec n entier.
4. En déduire le signe de $u(x)$ sur $\mathbb{R}^*$.

Partie 2

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = 2x - \frac{\ln|x|}{x^2}.$$

On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. Étudier les limites de f en 0, en $+\infty$ et $-\infty$.
2. Pour tout x réel, déterminer le nombre dérivé $f'(x)$.
3. En utilisant les résultats déjà établis, donner les variations de la fonction f et le tableau de variations de f.
4. (a) Démontrer que $f(\alpha) = 3\alpha - \frac{1}{2\alpha^2}$.
   (b) En utilisant l'encadrement de α trouvé à la **partie 1 3**, prouver que
   $1,6 < f(\alpha) < 2,1.$
   La construction de $\mathcal{C}$ n'est pas demandée.

Partie 3

Soit M le point de coordonnées $(x\ ;\ y)$ et M' le point de coordonnées $(x'\ ;\ y')$ dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, où M' est le symétrique de M par rapport à l'axe des ordonnées.

1. Déterminer x' et y' en fonction de x et y.
2. (a) Démontrer qu'une équation de la courbe Γ à laquelle appartient M' lorsque M décrit la courbe $\mathcal{C}$ est la suivante : $y = -2x - \dfrac{\ln|x|}{x^2}$.

   (b) Étudier la position relative des courbes Γ et $\mathcal{C}$.

Partie 4

On considère un réel m supérieur ou égal à 1.

1. On note $A(m)$ l'intégrale $\displaystyle\int_1^m [2x - f(x)]\,\mathrm{d}x$. Calculer $A(m)$. (On utilisera une intégration par parties.)
2. Déterminer, si elle existe, la limite de $A(m)$ quand m tend vers $+\infty$.