Activité : Changement de variables

Soit v une fonction $\mathcal{C}^1$ de $[a,b]$ dans $[c,d]$ telle que $v(a) = c$ et $v(b) = d$.

A. Rappel

Rappelons tout d'abord la construction de l'intégrale de la fonction u sur le segment $[c,d]$:

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, choisissons une subdivision de $[c,d]$: $c = x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = d$ par exemple celle qui vérifie $x_{i+1} - x_i = \frac{d-c}{n}$.

Notons alors $\Delta x = x_{i+1} - x_i = \frac{d-c}{n}$, il est clair que $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \Delta x = 0$

Considérons $\mathcal{S}_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\ \Delta x$ alors d'après notre cours $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \mathcal{S}_n = \int_c^d f(x)\,dx$

Avec ces notations, nous pouvons identifier lorsque n est suffisamment grand Δx à dx on parle d'élément infinitésimal. Il représente un déplacement infime suivant une variable.

B. Déplacement infinitésimal

Si $x_0 \in [c,d]$ existe-t-il $y_0 \in [a,b]$ tel que $v(y_0) = x_0$?

Grace à ce qui précède, on peut voir que le segment $[c,d]$ peut être décrit par la fonction v (toutes les valeurs sont atteintes) et donc la fonction $(u \circ v)(x)$ décrit aussi le même ensemble de valeurs. Pour la suite nous allons nous restreindre au cas où la fonction v est monotone.

Si $x_0 \in [c,d]$ et $y_0 \in [a,b]$ combien de solutions l'équation $v(y_0) = x_0$ possède-t-elle ?

On va se demander comment exprimer un déplacement infinitésimal dx en fonction de $v(y)$.

1. En utilisant la question précédente, nous savons qu'il existe y_{i+1} et y_i tels que $v(y_{i+1}) = x_{i+1}$ et $v(y_i) = x_i$ alors :
2. $\Delta x = x_{i+1} - x_i = v(y_{i+1}) - v(y_i)$
3. Utiliser le théorème des accroissements finis et réécrire l'égalité précédente en fonction de $\Delta y = y_{i+1} - y_i$
4. En faisant tendre n vers l'infini conclure à l'égalité : $dx = v'(y)\,dy$

C. Formule du changement de variable

Soit u une fonction continue sur $[c, d]$, on note U une de ses primitives sur $[c, d]$

1. Calculer la fonction dérivée de la fonction composée $(U \circ v)(y)$
2. Exprimer la différence $(U \circ v)(b) - (U \circ v)(a)$ sous forme d'intégrale
3. Exprimer la différence $U(d) - U(c)$ sous forme d'intégrale
4. Etablir la formule de changement de variable sous le signe intégral.

Exemple :

Nous voulons calculer une primitive de $\cos(x^3 - x)\,(3x^2 - 1)$

Cela revient à calculer $\int \cos(x^3 - x)\,(3x^2 - 1)\,dx$

Il faut remarquer que $(x^3 - x)' = 3x^2 - 1$

Posons $u(x) = x^3 - x$, alors $du = u'(x)\,dx = (3x^2 - 1)dx$

L'intégrale devient

$$I = \int \left(\cos\left(\underbrace{x^3 - x}_{u(x)}\right)\right)\underbrace{(3x^2 - 1)\,dx}_{u'(x)dx = du} = \int \cos(u)\,du = \sin(u) + C = \sin(x^3 - x) + C$$