ACTIVITE

But de l'exercice : approcher $\ln(1 + a)$ par un polynôme de degré 5 lorsque a appartient à l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

Soit a dans l'intervalle $[0 ; +\infty[$; on note $I_0(a) = \int_0^a \frac{dt}{1+t}$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_k(a) = \int_0^a \frac{(t-a)^k}{(1+t)^{k+1}} dt$.

1. Calculez $I_0(a)$ en fonction de a.
2. A l'aide d'une intégration par partie, exprimez $I_1(a)$ en fonction de a.
3. A l'aide d'une intégration par partie, démontrez que $I_{k+1}(a) = \frac{(-1)^{k+1} a^{k+1}}{k+1} + I_k(a)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
4. Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x$. Démontrez en calculant I_2(a), I_3(a) et I_4(a), que $I_5(a) = \ln(1 + a) - P(a)$.
5. Soit $J(a) = \int_0^a (t-a)^5 dt$. Calculez $J(a)$.
6. a. Démontrez que pour tout $t \in [0 ; a]$, $\frac{(t-a)^5}{(1+t)^6} \geq (t-a)^5$.

b. Démontrez que pour tout $a \in [0 ; +\infty[$, $J(a) \leq I_5(a) \leq 0$.

7. En déduire que pour tout $a \in [0 ; +\infty[$, $|\ln(1+a) - P(a)| \leq \frac{a^6}{6}$.
8. Déterminez, en justifiant votre réponse, un intervalle sur lequel $P(a)$ est une valeur approchée de $\ln(1 + a)$ à 10^{-3} près.