CHAPITRE

1 Techniques de calculs

Sommaire

Objectifs du chapitre :

- Se familiariser avec la factorielle d'un nombre entier, la combinatoire.
- Se familiariser à l'utilisation du symbole Σ.
- Connaître et utiliser la formule du binôme de Newton.
- Connaître des sommes particulières.

1 Dénombrement

1.1 Permutations

Définition 1.

On réalise une **permutation** si on écrit tous les éléments d'un ensemble dans un ordre déterminé.

Exemple

On considère 4 pions de couleurs, respectivement verte (V), rouge (R), bleue (B) et noire (N). On souhaite aligner les pions les uns derrière les autres. De combien de manières différentes (par l'ordre des couleurs) peut-on le faire ?

- Pour la première position, il y a 4 couleurs possibles. Pour la seconde, il n'y en a plus que 3. Pour la troisième position, il ne reste plus que deux possibilités de couleurs, et pour la dernière position, il ne restera qu'une couleur, la dernière. Un arbre permet de décrire complètement ce schéma.
- Il y a donc au total $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ possibilités d'ordonner les 4 pions de couleurs différentes.

Définition 2.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle **factorielle** n le nombre noté $n!$ qui vaut $n! = n \times (n-1) \times \ldots \times 2 \times 1$. Par convention, $0! = 1$.

Exemple

- $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$.
- $6! = 1 \times 2 \times \cdots \times 5 \times 6 = 720$.
- $8! = 1 \times 2 \times \cdots \times 7 \times 8 = 40320$.

Remarque

— $5!$ *se lit "factorielle 5", et non pas « 5 factorielle » !*

— *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $(n+1)! = (n+1) \times n!$. C'est une relation de récurrence.*

Exemple

On peut simplifier les expressions contenant des factorielles :

- $\dfrac{15!}{12!} = 15 \times 14 \times 13 = 2730$.
- $\dfrac{7!}{5!2!} = \dfrac{7 \times 6}{2} = 21$.
- $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!} = (n+1)n = n^2 + n$.

Exemple

Inversement, on peut réduire un calcul grâce aux factorielles :

- $1 \times 5 \times 3 \times 2 \times 4 = 5!$.
- $4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 = \dfrac{8!}{3!}$.
- $1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 = \dfrac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9}{2 \times 4 \times 6 \times 8} = \dfrac{9!}{2^4 \times 1 \times 2 \times 3 \times 4} = \dfrac{9!}{2^4 \times 4!}$.
- $2 \times 4 \times 6 \times ... \times (2n-2) \times (2n) = 2^n \times 1 \times 2 \times 3 \times ... \times (n-1) \times (n) = 2^n \times n!$.

Propriété 1.

Le nombre de permutations de n éléments est $n!$.

Remarque

On dit aussi qu'il y a $n!$ façons de ranger n objets dans n cases, de manière à placer tous les objets dans une et une seule case.

Exemple

Faire un emploi du temps d'une classe de BTS consiste (grossièrement) à placer 16 blocs de 2 heures, dans un planning hebdomadaire vierge, qui compte 16 créneaux de 2 heures. On peut déterminer le nombre d'emplois du temps différents que l'on peut constituer :

- de manière exacte ;
- en donnant un ordre de grandeur :
  - $16! = 20922789888000$ soit environ 21000 milliards ...

1.2 Combinaisons

Définition 3.

Soient n et p deux entiers naturels.

- on appelle **combinaison** de p éléments parmi n le fait de prélever p éléments parmi n, de manière à constituer un groupe dans lequel l'ordre n'a pas d'importance.
- Ce nombre de combinaison vaut : $\binom{n}{p} = \begin{cases} \dfrac{n!}{p!(n-p)!} & \text{si } p \leq n \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

Remarque

- *On trouve aussi la notation aussi* C_n^p *au lieu de* $\binom{n}{p}$*.*
- *Si l'on s'intéresse à la constitution d'un groupe ordonné (la place des éléments a une importance), on parle d'****arrangement****, au lieu de combinaison. On note ce nombre* $A_n^p = C_n^p \times p!$

Exemple

Calcul des combinaisons $\binom{5}{k}$ pour k variant de 0 à 5 :

- $\binom{5}{0} = \dfrac{5!}{0!(5-0)!} = \dfrac{5!}{0!5!} = 1.$
- $\binom{5}{1} = \dfrac{5!}{1!(5-1)!} = \dfrac{5!}{1!4!} = 5.$
- $\binom{5}{2} = \dfrac{5!}{2!(5-2)!} = \dfrac{5!}{2!3!} = 10.$
- $\binom{5}{3} = \dfrac{5!}{3!(5-3)!} = \dfrac{5!}{3!2!} = 10.$
- $\binom{5}{4} = \dfrac{5!}{4!(5-4)!} = \dfrac{5!}{4!1!} = 5.$
- $\binom{5}{5} = \dfrac{5!}{5!(5-5)!} = \dfrac{5!}{5!0!} = 1.$

Exemple

On tire 5 cartes au hasard dans un jeu de 32, pour constituer une main (sans tenir compte de l'ordre d'arrivée des cartes).

- Il y a $\binom{32}{5} = 201376$ mains possibles.
- Il y a $\binom{4}{3} \times \binom{28}{2} = 4 \times 378 = 1512$ mains contenant 3 rois exactement.

Propriété 2.

Soients n et p des entiers naturels tels que $p \leq n$, on a les propriétés suivantes :

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$
- Symétrie : $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}.$
- Factorisation : pour $p \neq 0$, $\binom{n}{p} = \dfrac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$
- Relation de Pascal : $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}.$

Triangle de pascal :

Pour de petites valeurs de n la formule de factorisation permet de construite le **triangle de Pascal**. Dans un tableau dont les lignes et les colonnes sont numérotées à partir de 0, on place la valeur de $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$ à l'intersection de la ligne n et la colonne p.

La relation de Pascal donne que la somme de deux coefficients consécutifs sur la même ligne (colonnes p et $p+1$), donne le coefficient situé sur la ligne suivante,colonne $p+1$. Au départ on part d'un tableau avec des 1 sur la colonne 0 et sur la diagonale.

Exemple de triangle de Pascal :

$$\begin{array}{ccccc}
\binom{0}{0} & & & & \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccccc}
 & 1 & & & & \\
 & 1 & 1 & & & \\
\text{donne :} & \boxed{1} + & \boxed{2} & 1 & & \\
 & 1 & \boxed{3} & 3 & 1 & \\
 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1
\end{array}$$

2 Utilisation du symbole Σ

Nous allons définir des notations qui permettent de manipuler des additions avec un nombre quelconque de termes.

Notation : Soient $a_0, a_1, ..., a_n$ une famille de n nombres indéxés (numérotés). On note cet ensemble de nombres plus simplement $(a_i)_{i\in[0;n]}$.

Définition 4.

Soient $a_0, a_1, ..., a_n$ des nombres.

On pose : $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + ... + a_n$

Si p est un entier entre 0 et n, on pose aussi : $\sum\limits_{k=p}^{n} a_k = a_p + a_{p+1} + ... + a_n$

Propriété 3 (Règles de calculs)**.**

Soient $(a_i)_{i\in[0;n]}$ et $(b_i)_{i\in[0;n]}$ deux familles de nombres ;

- Homogénéité. Si λ est un nombre, $\lambda \sum\limits_{k=0}^{n} a_k = \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda a_k$
- Linéarité. $\sum\limits_{k=0}^{n} (a_k + b_k) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k + \sum\limits_{k=0}^{n} b_k$
- Relation de Chasles. Si q est un entier entre p et n alors : $\sum\limits_{k=p}^{n} a_k = \sum\limits_{k=p}^{q} a_k + \sum\limits_{k=q+1}^{n} a_k$

La relation de Chasles permet de modifier les bornes de la somme, sans toucher au terme général.

La plupart du temps on l'utilisera pour isoler le premier ou le dernier terme :
$\sum\limits_{k=p}^{n} a_k = a_p + \sum\limits_{k=p+1}^{n} a_k = \sum\limits_{k=p}^{n-1} a_k + a_n$.

L'indice de la somme est une variable **muette** : $\sum\limits_{k=p}^{n} a_k = \sum\limits_{j=p}^{n} a_j = \sum\limits_{i\in[p;n]} a_i$.

On en déduit la propriété de changement d'indices, qui va permettre de modifier le terme général de la somme (et aussi ses bornes) voire de décaler les indices.

Propriété 4.

Si on fixe q un entier, et si on pose $k' = k + q$:
$\sum\limits_{p}^{n} a_k = a_p + a_{p+1} + ... + a_n = a_{(p+q)-q} + a_{(p+q+1)-q} + ... + a_{(n+q)-q} = \sum\limits_{k'=p+q}^{n+q} a_{k'-q}$.

On peut aussi inverser l'ordre des termes de la somme, en posant $k' = n - k$:
$\sum\limits_{k=p}^{n} a_k = a_p + a_{p+1} + ...a_{n-1} + a_n = a_n + a_{n-1} + ... + a_{p+1} + a_p = \sum\limits_{k=0}^{n-p} a_{k'}$

2.1 Exemples de sommes

Somme d'entiers consécutifs

Propriété 5 (Somme arithmétique)**.**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\sum\limits_{k=0}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Démonstration.

Pour la première formule, on additionne membre à membre les deux égalités suivantes

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & + & 2 & + & \ldots & + & n-1 & + & n & = & S_n \\ n & + & n-1 & + & \ldots & + & 2 & + & 1 & = & S_n \\ \hline (n+1) & + & (n+1) & + & \ldots & + & (n+1) & + & (n+1) & = & 2S_n \end{array}$$

Finalement, $2S_n = n \times (n+1)$ et donc $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Carl Friedrich Gauss, né le 30 avril 1777 à Brunswick (Saint-Empire romain germanique), mort le 23 février 1855 à Göttingen (Royaume de Hanovre).Mathématicien allemand, c'est un des plus grands mathématiciens de tous les temps. Certains l'ont même surnommé le « prince des mathématiques ». Alors âgé de trois ans, on raconte qu'il sut corriger son père dans un calcul de salaire.

Il est remarqué par ses instituteurs (notamment pour une méthode de calcul rapide de la somme qui suit) qui le poussent à poursuivre ses études. À dix-neuf ans, il résout un problème qui date d'Euclide, celui de la construction à la règle et au compas du polygône régulier à dix-sept côtés. Cette découverte fut à l'origine de sa décision de consacrer sa vie aux mathématiques. Il effectue sa thèse sous la direction de Johann Pfaff à l'université de Brunswick. Celle-ci porte sur une démonstration du théorème fondamental de l'algèbre. Gauss s'intéressa à de nombreuses branches des mathématiques : l'arithmétique, la géométrie, les probabilités, etc.
Il a permis des avancées énormes en théorie des nombres, en géométrie non-euclidienne,... Mais il s'est aussi intéressé, entre autres, à l'astronomie ou à la cartographie à chaque fois avec génie. Même si la portée de ses travaux ne fut pas complètement comprise par ses contemporains - Gauss ne publiant que très peu - ce fut la postérité qui comprit la profondeur et l'étendue de son travail à la lecture de son journal intime qui fut publié après sa mort. Il eut comme élèves Richard Dedekind et Bernhard Riemann.

Somme télescopique

Le principe des sommes télescopiques s'appuie sur le changement d'indices. La méthode en elle-même est très simple. La vraie difficulté est d'y penser et de repérer les sommes télescopiques en les mettant sous la bonne forme.

Propriété 6.

Soit $(a_i)_{i\in[0;n]}$ une famille de nombre.

On appelle somme télescopique la somme : $\sum\limits_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)$.

On a alors $\sum\limits_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k) = a_n - a_0$

Pour $p \in [0;n]$ on a : $\sum\limits_{k=p}^{n}(a_{k+1}-a_k) = a_{n+1}-a_p$

Démonstration.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k) &= \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} a_k = a_n + \sum_{k=0}^{n-2} a_{k+1} - \sum_{k=1}^{n-1} a_k - a_0 \\ &= a_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k - a_0 = a_n - a_0\end{aligned}$$

Exemple

Calculons $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

On remarque tout d'abord que $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

Ainsi grâce au télescopage : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$

2.2 Formule du binôme de Newton

Rappel :

Au lycée vous avez certainement appris les formules d'identités remarquables qui suivent :

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

La question toute naturelle qui se pose alors est : ces formules se généralisent-t-elles à des exposants plus grands ?

Les coefficients $\binom{n}{k}$ prennent aussi le nom de ***coefficients binomiaux***

Proposition 1 (Formule du binôme de Newton)**.**

Pour tous réels a et b et tout entier naturel n, on a : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \, b^{n-k}$.

Exemple

Développons $(x+2)^4$:

- $(x+2)^4 = \sum_{k=0}^{4} \binom{n}{k} x^k \, 2^{4-k}$.
- Le triangle de pascal nous donne respectivement les coefficients pour $n = 4$, on a : 1 - 4 - 6 - 4 - 1.
- Donc : $(x+2)^4 = 1 \times 2^4 \times x^0 + 4 \times 2^3 \times x^1 + 6 \times 2^2 \times x^2 + 4 \times 2^1 \times x^3 + 1 \times 2^0 \times x^4$
  $= 16 + 32x + 24x^2 + 8x^3 + x^4$.

Exemple (Cas particuliers)

- $(a+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k$
- $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

Démonstration.

Nous allons raisonner par récurrence sur $n \geq 0$.

- Initialisation : $(a+b)^0 = 1$ et $\binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$. Donc $(a+b)^0 = \binom{0}{0} a^0 b^0$
- Hérédité : Supposons le résultat vrai à un certain rang n alors $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}$.

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n = (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k} \\
&= a \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k} + b \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1}\, b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k+1} \\
&= \sum_{k'=1}^{n+1} \binom{n}{k'-1} a^{k'}\, b^{n-(k'-1)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k+1} \\
&= \sum_{k'=1}^{n+1} \binom{n}{k'-1} a^{k'}\, b^{n-k'+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k+1} \\
&= \binom{n}{n} a^{n+1} + \sum_{k'=1}^{n} \binom{n}{k'-1} a^{k'}\, b^{n-k'+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k+1} + \binom{n}{0} b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k\, b^{n-k+1} + b^{n+1} \\
&= \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k\, b^{n+1-k} + \binom{n+1}{0} b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k\, b^{n+1-k}
\end{aligned}$$

- Le résultat étant vrai pour $n = 0$, d'après le principe de récurrence, il est vrai pour tout n.

Somme des carrés d'entiers entiers consécutifs

Propriété 7 (Somme d'Euler)**.**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Leonhard Euler, né le 15 avril 1707 à Bâle et mort le 18 septembre 1783 à Saint-Pétersbourg. Peu après sa naissance les parents d'Euler déménagent à Riehen. Le père d'Euler est un ami de la famille Bernoulli et Jean Bernoulli, dont Euler profita des leçons, est alors considéré comme le meilleur mathématicien européen. Le père d'Euler souhaite que Leohnard devienne comme lui pasteur mais Jean Bernoulli qui a remarqué les aptitudes remarquables de son élève, le convainc qu'il est destiné aux mathématiques.

Après ses études à Bâle, il obtient un poste à Saint-Pétersbourg en 1726 qu'il quitte pour un poste à l'académie de Berlin en 1741. Malgré la qualité de ses contributions à l'académie, il est contraint de la quitter en raison d'un conflit avec Frédéric II. Voltaire qui était bien vu par le roi avait des qualités rhétoriques qu'Euler n'avait pas et dont il fut la victime. En 1766, il retourne à Saint-Pétersbourg où il décéda en 1783.

Euler souffrit tout au long de sa vie de graves problèmes de vue. Fait remarquable, il effectua la plus grande partie de ses découvertes lors des dix-sept dernières années de sa vie, alors qu'il était devenu aveugle.

Il fut, avec 886 publications, un des mathématiciens les plus prolifiques de tous les temps. Il est à l'origine de multiples contributions en analyse (nombres complexes, introduction des fonctions logarithmes et exponentielles, détermination de la somme des inverses des carrés d'entiers, introduction de la fonction gamma, invention du calcul des variations, ...), géométrie (cercle et droite d'Euler d'un triangle, formule liant le nombre de faces, d'arêtes et de sommets d'un polyèdre, ...), théorie des nombres (fonction indicatrice d'Euler, ...), théorie des graphes (problème des sept ponts de Königsberg) ou même en physique (angles d'Euler, résistance des matériaux, dynamique des fluides...) et en astronomie (calcul de la parallaxe du soleil,...).

Démonstration.

Grâce à la formule du binôme de Newton on remarque que pour tout entier k,
$(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$ donc $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$.

En passant à la somme de 0 à n d'indice k on remarque que les cubes d'entiers successifs se télescopent. On a alors :

$$(n+1)^3 = 3\sum_{k=0}^{n} k^2 + 3\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1.$$

En utilisant la formule de somme arithmétique on a :

$$3\sum_{k=0}^{n} k^2 = (n+1)^3 - \frac{3}{2}n(n+1) - n - 1 \iff 6\sum_{k=0}^{n} k^2 = 2(n+1)^3 - 3n(n+1) - 2n - 2$$

En développant : $6\sum_{k=0}^{n} k^2 = 2(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - 3n^2 - 3n - 2n - 2$

$$6\sum_{k=0}^{n} k^2 = 2n^3 + 6n^2 + 6n + 2 - 3n^2 - 3n - 2n - 2$$

En réduisant : $6\sum_{k=0}^{n} k^2 = 2n^3 + 3n^2 + n$

En factorisant par n : $6\sum_{k=0}^{n} k^2 = n(2n^2 + 3n + 1)$

Par identification, on vérifie que $2n^2 + 3n + 1 = (n+1)(2n+1)$ (Exercice)

On a alors en divisant par 6 : $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$