CHAPITRE

9 Série de Fourier

En analyse, les séries de Fourier sont un outil fondamental dans l'étude des fonctions périodiques. C'est à partir de ce concept que s'est développé la branche des mathématiques connue sous le nom d'analyse harmonique.

L'étude d'une fonction périodique par les séries de Fourier comprend deux volets. ***L'analyse*** *consiste en la détermination de la suite de ses coefficients de Fourier.* ***La synthèse*** *permet de retrouver, en un certain sens, la fonction à l'aide de la suite de ses coefficients.*

Au-delà du problème de la décomposition, la théorie des séries de Fourier établit une correspondance entre la fonction périodique et les coefficients de Fourier. De ce fait, l'analyse de Fourier peut être considérée comme une nouvelle façon de décrire les fonctions périodiques. Des opérations telles que la dérivation s'écrivent simplement en termes de coefficients de Fourier. La construction d'une fonction périodique solution d'une équation fonctionnelle peut se ramener à la construction des coefficients de Fourier correspondants.

Les séries de Fourier ont été introduites par Joseph Fourier en 1822, mais il fallut un siècle pour que les analystes dégagent les outils d'étude adaptés : une théorie de l'intégrale pleinement satisfaisante et les premiers concepts de l'analyse fonctionnelle. Elles font encore actuellement l'objet de recherches actives pour elles-mêmes, et ont suscité plusieurs branches nouvelles : analyse harmonique, théorie du signal, ondelettes...

Les séries de Fourier se rencontrent usuellement dans la décomposition de signaux périodiques, dans l'étude des courants électriques, des ondes cérébrales, dans la synthèse sonore, le traitement d'image...

Source: https://www.techno-science.net/definition/6332.html

Sommaire

1 Série numérique **3**

1.1 Définition 3

1.2 Série géométrique (rappel) 4

1.3 Convergence des séries à termes positifs 4

1.4 Convergence des séries à termes quelconques 6

2 Série trigonométrique **7**

3 Série de Fourier **10**

3.1 Calcul des coefficients de Fourier 10

3.2 Convergence des séries de Fourier 13

3.3 Analyse spectrale 14

3.4 Formule de Parseval 15

Objectifs du chapitre :

- Savoir utiliser les critères pour démontrer qu'une série est convergente ou divergente
- Savoir calculer les coefficients de Fourier associés à une fonction
- Savoir utiliser le théorème de Dirichlet
- Savoir déterminer les harmoniques d'une fonction et représenter le spectre de fréquences
- Savoir utiliser le formule de Parseval

1 Série numérique

1.1 Définition

Définition 1 (Série)**.**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique.

On pose $S_N = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_N$. On note $S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$.

- Si $\lim_{N\mapsto+\infty} S_N$ existe et a une valeur finie S, on dit que la **série** $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ de terme générale u_n converge vers S et on écrit $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = S$.
  S est appelée **somme de la série**.
- Sinon, on dit que la série diverge.

Remarque

Si le terme u_0 n'existe pas, on fera la somme à partir de $i = 1$ ou plus.

*Si la série $|u_n|$ est convergente, on dit que la série est **absolument convergente**.*

Proposition 1.

Si $S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$ est convergente alors u_N converge vers 0

Démonstration.

Supposons S_N convergente vers l alors la suite S_{N-1} converge vers la même limite. Ainsi $u_N = S_N - S_{N-1}$ converge vers 0.

La réciproque est fausse et n'est pas un critère de convergence

Par contre c'est un critère de **divergence!**

1.2 Série géométrique (rappel)

Théorème 1 (Séries géométriques)**.**

On appelle **série géométrique de raison** q $(q \neq 0)$ une série de la forme $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$.

Une série géométrique de raison q converge si et seulement si $|q| < 1$.

Si $|q| < 1$ et $q \neq 0$, on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Démonstration.

Tout commence avec l'identité $1 - x^n = (1-x)(1 + x + x^2 + ... + x^{n-1}) = (1-x)\sum_{k=0}^{n-1} x^k$.
Lorsque $x \neq 1$ on peut écrire $\sum_{k=0}^{n-1} x^k = \dfrac{1-x^n}{1-x}$.
Or $\dfrac{1-x^n}{1-x} = \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{x^n}{1-x}$ converge si et seulement si $|x| < 1$ (sinon x^n n'est pas bornée) vers $\dfrac{1}{1-x}$.

Exemple

La série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 3^n = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \cdots$ est divergente.

La série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{-1}{3}\right)^n = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} - \dfrac{1}{3^3} + \cdots$ est convergente et a pour valeur $\dfrac{1}{1+\frac{1}{3}} = \dfrac{3}{4}$.

1.3 Convergence des séries à termes positifs

Théorème 2 (Critère de Riemann)**.**

La série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

Exemple

Ce théorème prouve la convergence de $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n^3}$ et la divergence de $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$.

Démonstration.

Tout d'abord si $\alpha \leq 0$ le terme général de la série ne tend pas vers 0. La série ne peut être convergente.

Ensuite si $\alpha > 0$, remarquons que la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ est décroissante sur $I =]0; +\infty[$.

Ainsi lorsque $k \in \mathbb{N}$ on peut écrire : $\dfrac{1}{k^\alpha} \geq \dfrac{1}{x^\alpha} \geq \dfrac{1}{(k+1)^\alpha}$ pour $x \in [k; k+1]$.

En intégrant sur $[k; k+1]$, on a $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{k^\alpha} dx = \frac{1}{k^\alpha}$ et l'inégalité précédente devient : $\displaystyle\frac{1}{k^\alpha} \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{x^\alpha} dx \geq \frac{1}{(k+1)^\alpha}$ par propriété de l'intégrale.

En sommant pour $k \in [1; n]$ on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \geq \int_1^{n+1} \frac{1}{x^\alpha} dx \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^\alpha}$.

L'intégrale $\displaystyle\int_1^{n+1} \frac{1}{x^\alpha} dx$ et la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ sont donc de même nature. Deux cas se présentent alors, si $\alpha = 1$ et si $\alpha \neq 1$

- Si $\alpha \neq 1$
  $\displaystyle\int_1^{n+1} \frac{1}{x^\alpha} dx = \left[\frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{x^{\alpha-1}}\right]_1^{n+1} = \frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{1-\alpha}$
  Le terme $\dfrac{1}{n^{\alpha-1}}$ (dont dépend la convergence) converge si et seulement si $\alpha - 1 > 0$ c'est à-dire lorsque $\alpha > 1$

- Si $\alpha = 1$
  $\displaystyle\int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = [\ln(x)]_1^{n+1} = \ln(n+1)$ qui est divergente.

Théorème 3 (Critère de comparaison)**.**

Si, pour tout n, on a $0 \leq u_n \leq v_n$ alors :

- si la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ diverge, alors la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ diverge ;
- si la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ converge, alors la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge.

Démonstration.

Utiliser le critère de comparaison des suites.

Exemple

Soit la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n^2}$.

Pour tout $n > 0$, on a $0 \leq |\sin n| \leq 1$, donc $0 \leq u_n \leq 1 \times \dfrac{1}{n^2}$.

La série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge (critère de Riemann) donc la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n^2}$ converge.

Théorème 4 (Critère d'équivalence. Admis)**.**

Deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dites **équivalentes** si et seulement si $\lim\limits_{n\mapsto\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=1$. On note $u_n\sim v_n$.

Si, pour tout n, on a $0\leq u_n$ et $0\leq v_n$, et si les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes, alors les séries $\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n$ et $\sum\limits_{n=0}^{\infty}v_n$ sont de même nature.

Exemple

— La série $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+1}$ est convergente car les suites de termes généraux $\dfrac{1}{n^2+1}$ et $\dfrac{1}{n^2}$ sont équivalentes. En effet, $\lim\limits_{n\mapsto\infty}\dfrac{n^2+1}{n^2}=1$.

— La série $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^3+1}}$ est divergente, car la suite de terme général $\dfrac{n}{\sqrt{n^3+1}}$ est équivalente à la suite de terme général $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ est divergente (critère de Riemann).

Théorème 5 (Règle de d'Alembert. Admis)**.**

Soit une série de terme général u_n strictement positif.

On note l, la quantité $l=\lim\limits_{n\mapsto\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

- si $l>1$ alors la série est divergente ;
- si $l<1$ alors la série est convergente ;
- si $l=1$, on ne peut pas conclure.

Exemple

Soit la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}$.

Pour tout n, on a $u_n>0$. De plus, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{n!}{(n+1)!}=\dfrac{1}{n+1}$; donc $\lim\limits_{n\mapsto\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=0<1$.

D'après la règle de d'Alembert, la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}$ converge.

1.4 Convergence des séries à termes quelconques

Définition 2 (Absolue convergence)**.**

Si la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|u_n|$ converge alors la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n$ converge.

On dit que la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n$ est **absolument convergente**.

Remarque

Selon le théorème, une série absolument convergente est convergente. La réciproque n'est pas vraie. Il existe des séries qui sont convergentes mais pas absolument convergente. Un exemple est donné ci-après (série alternée).

Exemple

Soit la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$.

Pour tout $n > 0$, $|u_n| = \left|\frac{1}{n^3} \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right| \leq \frac{1}{n^3}$.

La série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ est convergente (critère de Riemann), donc la série $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$ converge (critère de comparaison), donc la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est absolument convergente donc convergente.

Théorème 6 (Séries alternées. Admis)**.**

On dit qu'une série est **alternée** si ses termes sont alternativement positifs et négatifs.
Soit $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ une série alternée.
Si pour tout n, $|u_{n+1}| \leq |u_n|$ et si $\lim\limits_{n\mapsto\infty} u_n = 0$ alors la série est convergente.

Exemple

Soit la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. C'est une série alternée.

Elle n'est pas absolument convergente car $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge (critère de Riemann).

Cependant pour tout $n > 0$, $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$ donc $|u_{n+1}| \leq |u_n|$ et on a $\lim\limits_{n\mapsto\infty} u_n = 0$, donc la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente (bien que pas absolument convergente).

2 Série trigonométrique

Définition 3.

Une fonction sinusoïdale s'exprime par : $f(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$ ou encore $g(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$.

- A représente **l'amplitude** de la sinusoïde
- ω représente **la pulsation**
- φ représente **la phase à l'origine** (ou déphasage)

https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Ondes/general/sinus.php

Propriété 1.

La période d'une fonction sinusoïdale est $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

Définition 4 (Série trigonométrique)**.**

Une **série trigonométrique** est une série dont le terme général est de la forme

$$u_n = a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

C'est à dire, c'est la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

qui s'écrit encore :

$$a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t).$$

Si pour tout réel t, cette série converge, elle définit une fonction S de la variable réelle t.

On dira que la série trigonométique converge vers $S(t)$.

Définition 5.

Si pour tout réel t, cette série converge alors on définit la fonction S par

$$S(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

On dit alors que la série trigonnométrique converge vers la fonction S.

Remarque

La série converge vers une fonction et non plus vers un nombre.

Exemple

$$3 + \sum_{n\geq 1} (-1)^n \cos(2\pi n t) + 18 \sin(2\pi n t)\ , \qquad a_0 = 3\ ,\ a_n = (-1)^n\ ,\ b_n = 18\ ,\ \omega = 2\pi$$

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n} \sin(nt)\ , \qquad a_0 = \frac{\pi}{2}\ ,\ a_n = 0\ ,\ b_n = \frac{(-1)^n}{n}\ ,\ \omega = 1$$

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(5)^n + 3}{n+6} \cos(3nt)\ , \qquad a_0 = 0\ ,\ a_n = \frac{(5)^n + 3}{n+6}\ ,\ b_n = 0\ ,\ \omega = 3$$

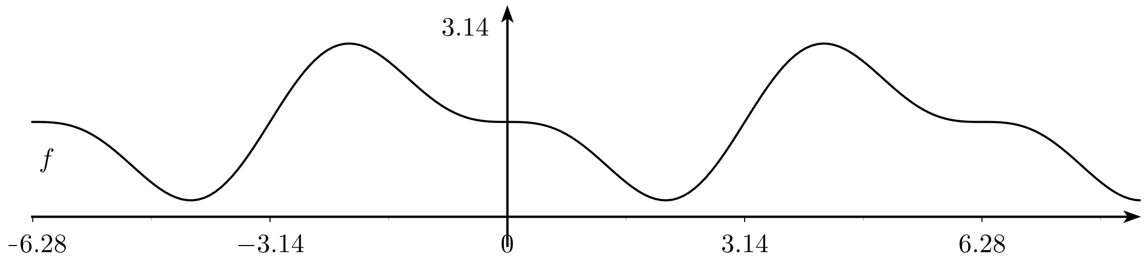
Exemple

Prenons $\omega = 1, a_0 = \frac{\pi}{2}, a_n = 0$ si $n > 0$ et $b_n = \frac{(-1)^n}{n}$.
La série de Fourier s'écrit alors :

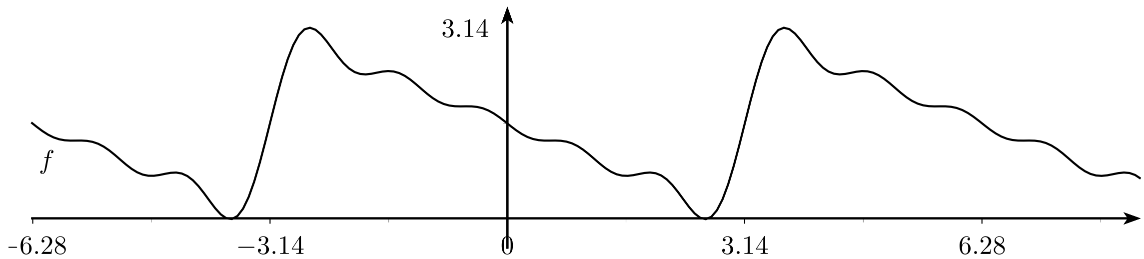
$$\begin{aligned} S(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} 0\cos(nt) + \frac{(-1)^n}{n}\sin(nt) \\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}\sin(nt) = \frac{\pi}{2} - \sin(nt) + \frac{\sin(2t)}{2} - \frac{\sin(3t)}{3} + \frac{\sin(4t)}{4} + \cdots \end{aligned}$$

Pour ressentir si cette série converge, on trace les représentations graphiques de la somme des premiers termes.

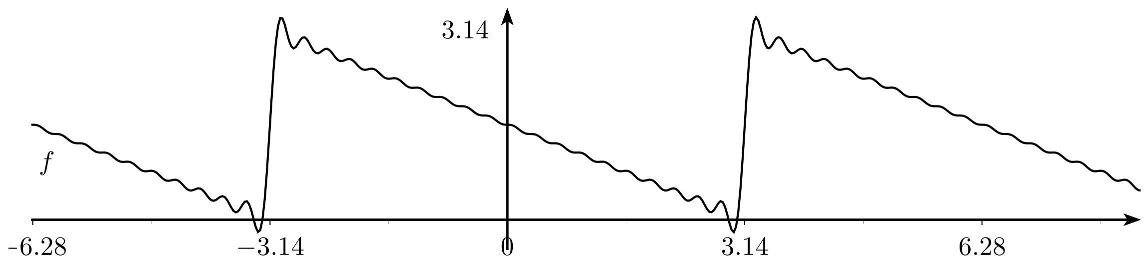
— Représentation graphique de $S_2(t) = \frac{\pi}{2} - \sin(t) + \frac{\sin(2t)}{2}$:



— Représentation graphique de $S_5(t) = \frac{\pi}{2} - \sin(t) + \frac{\sin(2t)}{2} - \frac{\sin(3t)}{3} + \frac{\sin(4t)}{4} - \frac{\sin(5t)}{5}$:

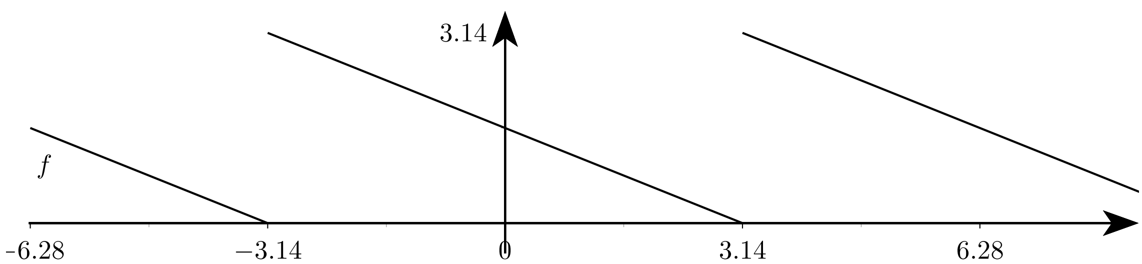


— Représentation graphique de $S_{20}(t) = \frac{\pi}{2} - \sin(t) + \frac{\sin(2t)}{2} - \frac{\sin(3t)}{3} + \cdots + \frac{\sin(20t)}{20}$:



Il semblerait que cette série converge vers la fonction S de période 2π définie par

$$S(t) = \frac{-t}{2} + \frac{\pi}{2} \text{ pour } t \in]-\pi; +\pi[$$



Remarque

Aux points $t = \frac{n\pi}{2}$, *on a discontinuité pour la fonction* f. *En fait, on peut remarquer qu'en ces points on a* $S(t) = \frac{\pi}{2}$.

Théorème 7 (Périodicité)**.**

Si une série trigonométrique de terme général $u_n = a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$ converge vers une fonction $S(t)$, alors la fonction S est périodique de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

3 Série de Fourier

3.1 Calcul des coefficients de Fourier

Jean Baptiste Joseph Fourier, né le 21 mars 1768 à Auxerre et mort le 16 mai 1830 à Paris, est un mathématicien et physicien français, connu pour ses travaux sur la décomposition de fonctions périodiques en séries trigonométriques convergentes appelées séries de Fourier et leur application au problème de la propagation de la chaleur.

Il fait ses études à l'École militaire d'Auxerre dirigée alors par les Bénédictins de la Congrégation de Saint-Maur. Destiné é l'état monastique, il préfère s'adonner aux sciences. Il intègre l'École normale supérieure, où il a entre autres comme professeurs Joseph-Louis Lagrange, Gaspard Monge et Pierre-Simon de Laplace, auquel il succède à la chaire à Polytechnique en 1797.
Il participe à la Révolution, manquant de peu de se faire guillotiner durant la Terreur, sauvé de justesse par la chute de Robespierre. En 1798, il prend part à la campagne d'Égypte. Il occupe un haut poste de diplomate et devient secrétaire de l'Institut d'Égypte. À son retour en France en 1802, Napoléon le nomme préfet de l'Isère le 12 février : il est destitué lors de la Restauration.

En 1817, il est élu membre de l'Académie des sciences, dont il devient secrétaire perpétuel pour la section des sciences mathématiques à la mort de Jean-Baptiste Joseph Delambre en 1822. En 1826, il est élu membre de l'Académie française.
Fourier est connu pour sa Théorie analytique de la chaleur, paru en 1822. On lui doit aussi plusieurs mémoires ainsi que des Rapports sur les progrès des sciences mathématiques, parus en 1822-1829, et des Éloges de Jean-Baptiste Joseph Delambre, William Herschel et Abraham Breguet. Il est élu membre étranger à la Royal Society le 11 décembre 1823.
Fourier est enterré au cimetière du Père-Lachaise à Paris, à côté de Champollion.

Source: `https://www.techno-science.net/glossaire-definition/Joseph-Fourier.html`

Définition 6 (Coefficients de Fourier)**.**

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, f une fonction réelle de période T alors on appelle **coefficients de Fourier de** f les nombre réels a_0, a_n, b_n (lorsqu'ils existent) définis par :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\;dt = \mu_f \text{ (Valeur moyenne de } f) \\ a_n &= \frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\cos(n\omega t)\;dt \quad\; n \in \mathbb{N}^* \\ b_n &= \frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\sin(n\omega t)\;dt \quad n \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

Définition 7.

On appelle **série de Fourier associée à** f la série trigonométrique définie par les coefficients de Fourier de f :

$$S_f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t).$$

Théorème 8 (Cas des fonctions paires)**.**

Si f est paire, on a :

$$\begin{aligned} b_n &= 0 \text{ pour tout } n \;; \\ a_0 &= \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\;dt = \mu_f(\text{ Valeur moyenne de } f) \\ a_n &= \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\omega t)\;dt \end{aligned}$$

Démonstration.

f est paire donc $f(t)\sin(n\omega t)$ est impaire. Son intégrale est donc nulle sur une période.

f est paire donc $f(t)\cos(n\omega t)$ est paire. Son intégrale est donc le double de celle obtenue sur une demi-période.

Théorème 9 (Cas des fonctions impaires)**.**

Si f est impaire, on a :

$$\begin{aligned} a_n &= 0 \text{ pour tout } n \;; \\ b_n &= \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(n\omega t)\;dt \end{aligned}$$

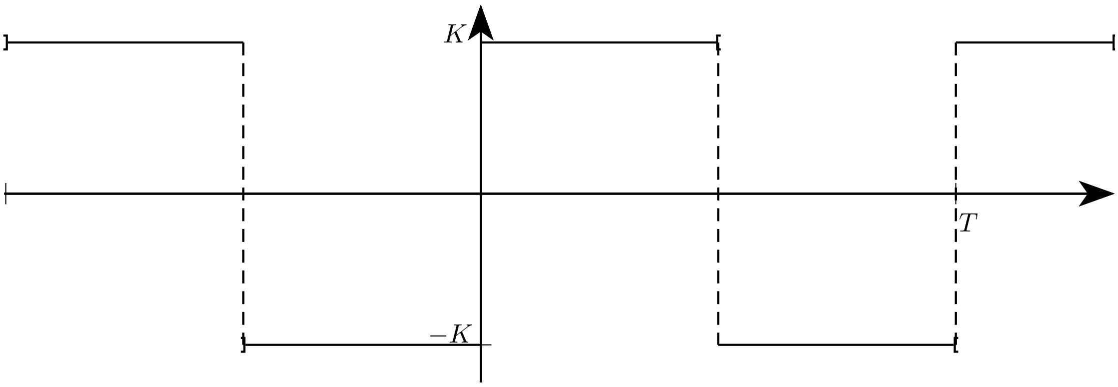
Démonstration.

Similaire à la précédente.

Exemple ***(signal rectangulaire à alternance égales.)***

On considère la fonction f impaire de période T, définie par

$$\begin{cases} f(t) &= K \text{ si } t \in [0; \frac{T}{2}[; \\ f(t) &= -K \text{ si } t \in [\frac{-T}{2}; 0[. \end{cases}$$



La fonction f est impaire donc pour tout n, on a $a_n = 0$.

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(n\omega t)dt \\ &= \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} K\sin(n\omega t)dt \\ &= \frac{4K}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} \sin(n\omega t)dt \\ &= \frac{4K}{T}\frac{1}{n\omega}\left[-\cos(n\omega t)\right]_0^{\frac{T}{2}} \\ &= \frac{4K}{Tn\omega}\left[-\cos(n\omega\frac{T}{2}) + \cos(0)\right] \end{aligned}$$

Or $\omega T = 2\pi$ et $\cos(0) = 1$, on en déduit que $b_n = \dfrac{2K}{n\pi}(-\cos(n\pi) + 1)$.

De plus, si n est pair, alors $\cos(n\pi) = 1$ donc $b_n = 0$

Si n est impair, alors $\cos(n\pi) = -1$ donc $b_n = \dfrac{4K}{n\pi}$

La série de Fourier associée à f est donc :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin(n\omega t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t) \\ &= \frac{4K}{\pi}\left(\sin(\omega t) + \frac{\sin(3\omega t)}{3} + \frac{\sin(5\omega t)}{5} + \cdots\right) \\ &= \frac{4K}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\sin((2p+1)t)}{2p+1} \end{aligned}$$

3.2 Convergence des séries de Fourier

Une fonction périodique f étant donné, si j'arrive à calculer les coefficients de Fourier qui lui sont associés, à quelle condition suffisante la série de Fourier converge-t-elle vers f ?

Définition 8 (Conditions de Dirichlet)**.**

Soit f une fonction périodique de période T.

On dit que f satisfait aux **conditions de Dirichlet** si :

- sur une période, la fonction est définie, continue et dérivable et admet une dérivée continue, sauf éventuellement en un nombre fini de points.
- en ces points particuliers, f et f' admettent des limites finies à gauche et à droite.

Théorème 10 (Théorème de Dirichlet)**.**

Soit f une fonction périodique de période T satisfaisant aux conditions de Dirichlet, alors :

- si f est continue en t_0, la série de Fourier associée à f converge vers $f(t_0)$;
- si f n'est pas continue en t_0, la série de Fourier associée à f converge vers

$$\frac{1}{2}\left(f(t_0^+)+f(t_0^-)\right)$$

avec $f(t_0^-)=\lim\limits_{\substack{t\to t_0\\ t<t_0}} f(t)$ et $f(t_0^+)=\lim\limits_{\substack{t\to t_0\\ t>t_0}} f(t)$

Exemple

Reprenons l'exemple cité précédemment.

f est une fonction continue, dérivable ($f'(t)=0$) sauf aux points de discontinuité de valeurs $t=k\frac{T}{2}$. En ces points particuliers, f (resp. f') admettent des limites finies à gauche et à droite dont les valeurs sont $\pm K$ (resp ; 0). Donc f satisfait aux conditions de Dirichlet.

— Si $t\neq\frac{kT}{2}$, f est continue et, d'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier associée à f converge vers f. On peut donc écrire :

$$\text{si } t\neq\frac{kT}{2} : f(t)=\frac{4K}{\pi}\left(\sin(\omega t)+\frac{\sin(3\omega t)}{3}+\frac{\sin(5\omega t)}{5}+\cdots\right)$$

— Si $t=\frac{kT}{2}$, f est discontinue et, d'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier associée à f converge vers $\frac{1}{2}\left(f(t_0^+)+f(t_0^-)\right)=\frac{1}{2}(K-K)=0$

Remarque

Une série de Fourier permet de calculer certaines séries numériques.

En effet, en prenant $K = 1$, $T = 2\pi$ (donc $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 1$) et $t = \dfrac{\pi}{2}$ dans l'exemple précedent, on obtient :

$$\begin{cases} f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) &= K = 1 \\ f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) &= \dfrac{4}{\pi}\left(\sin(\dfrac{\pi}{2}) + \dfrac{\sin(\dfrac{3\pi}{2})}{3} + \dfrac{\sin(\dfrac{5\pi}{2})}{5} + \cdots\right) \end{cases}$$

donc

$$1 = \frac{4}{\pi}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right)$$

et donc

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}$$

3.3 Analyse spectrale

Soit f une fonction périodique et $a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$ sa série de Fourier associée.

Pour $n > 0$ fixé, on peut écrire $a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) = A_n \sin(n\omega t - \varphi_n)$ avec $A_n \geq 0$.

Or $A_n \sin(n\omega t - \varphi_n) = A_n \sin(n\omega t)\cos(\varphi_n) - A_n \cos(n\omega t)\sin(\varphi_n)$.

En identifiant, on trouve : $\begin{cases} a_n &= -A_n \sin(\varphi_n) \\ b_n &= A_n \cos(\varphi_n) \end{cases}$ dont on déduit que : $\begin{cases} a_n^2 &= A_n^2 \sin^2(\varphi_n) \\ b_n^2 &= A_n^2 \cos^2(\varphi_n) \end{cases}$

En additionnant membre à membre : $a_n^2 + b_n^2 = A_n^2\left(\sin^2(\varphi_n) + \cos^2(\varphi_n)\right) = A_n^2$.

donc

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}.$$

Définition 9 (Harmoniques)**.**

La série de Fourier associée à f peut s'écrire $a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sin(n\omega t - \varphi_n)$ avec $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$.

a_0 est la **valeur moyenne** de f sur une période.

Les termes suivants $A_n \sin(n\omega t - \varphi_n)$ sont les **harmoniques.**

Le premier harmonique est parfois appelé le **fondamental**.

Définition 10 (Spectre des fréquences)**.**

Le **spectre des fréquences** est la représentation graphique par un diagramme en bâtons de la suite (A_n).

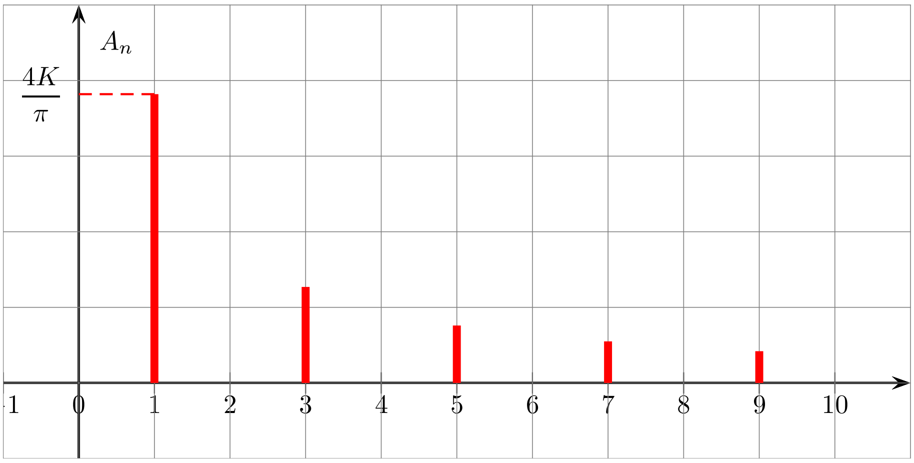
Exemple

Poursuivons l'exemple précédent.

On avait $a_n = 0$ et $b_n = 0$ (resp. $\frac{4K}{n\pi}$) si n est pair (resp. n impair).

Ainsi, $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = 0$, si n est pair et $A_n = \frac{4K}{n\pi}$ si n est impair.

Spectre des fréquences de f.



3.4 Formule de Parseval

Théorème 11 (Formule de Parseval)**.**

Soit f une fonction périodique vérifiant les conditions de Dirichlet. Nous admettrons le résultat suivant appelé **formule de Parseval** :

$$\frac{1}{T}\int_a^{a+T} f^2(x)\,dx = a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}$$

Lorsque l'intégrale est plus facile à calculer que la série, l'égalité de Parseval est un moyen de calculer la somme de certaines séries numériques.

Exemple

En reprenant l'exemple ci-dessus, on a :

- $\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T K^2\,dt = \frac{K^2}{T}[t]_0^T = K^2$
- $a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2} = 0 + \frac{1}{2}\left(\frac{4^2K^2}{\pi^2} + \frac{4^2K^2}{3^2\pi^2} + \frac{4^2K^2}{5^2\pi^2} + \frac{4^2K^2}{7^2\pi^2} + \cdots\right) = \frac{8K^2}{\pi^2}\left(+\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots\right).$

d'après la formule de Parseval, on obtient, $\frac{8K^2}{\pi^2}\left(+\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots\right) = K^2$

Soit $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}$

Dans de nombreuses applications physiques (courant électrique par exemple), cette formule peut s'interpréter comme suit : l'énergie totale s'obtient en sommant les contributions des différents harmoniques. En effet, calculons la valeur efficace E_n des harmoniques.

$$\begin{aligned}
E_n^2 &= \frac{1}{T}\int_0^T \left(A_n \sin(n\omega t - \varphi_n)\right)^2 dt \\
&= \frac{A_n^2}{T}\int_0^T \sin^2(n\omega t - \varphi_n) dt \\
&= \frac{A_n^2}{T}\int_0^T \frac{1-\cos(2n\omega t - 2\varphi_n)}{2} dt \qquad \text{(car formule trigo)} \\
&= \frac{A_n^2}{2T}\left([t]_0^T - \left[\frac{\sin(2n\omega t - 2\varphi_n)}{2n\omega}\right]_0^T\right) \\
&= \frac{A_n^2}{2T}\left(T - \frac{\sin(4\pi n - 2\varphi_n)}{2n\omega} + \frac{\sin(-2\varphi_n)}{2n\omega}\right) \qquad (\text{ car } \omega T = 2\pi) \\
&= \frac{A_n^2}{2T} T \qquad \text{(car sinus de période } 2\pi) \\
&= \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}
\end{aligned}$$

Théorème 12.

Sur une période,

(valeur efficace de f)^2 = (valeur moyenne de f)^2 + $\sum$(valeurs efficaces des harmoniques)^2